

Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

■ Exercice de cours

Exercice 1 — Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. *Ex. de cours, Chap. 23, II.4.* Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$.

2. *Ex. de cours, Chap. 23, IV.2.* On suppose que $g \circ f = 0$. Montrer : $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq n$

Exercice 2 *Résultat de cours, Chap. 23, III* — On suppose E muni d'une base $(b_i)_{i \in I}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que f est injective si et seulement si $(f(b_i))_{i \in I}$ est libre.

Exercice 3 *Exercice, feuille 21 (et Ex. 62, banque INP)* — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id}_E = 0$. Montrer : $E = \text{Ker}(f + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$.

Exercice 4 *Résultats de cours, Chap 23 IV* — Soit E, F deux \mathbb{K} -e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

1. *Théorème 1, Chap 23, IV.* On suppose que $\text{Ker } f$ possède un supplémentaire S dans E . Montrer que f induit un isomorphisme de S sur $\text{Im } f$

2. *Théorème 2, Chap 23, IV.* Enoncer et démontrer le théorème du rang.

1 Généralités

Sauf mention du contraire, E et F sont des espaces vectoriels sur \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

1.1 Montrer qu'une application est linéaire

Définition

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite *linéaire* si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

- **Vocabulaire.** Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, forme linéaire.

- **Remarque.** $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un morphisme de groupes additifs donc $f(0_E) = 0_F$

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème

$\mathcal{L}(E, F)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel (pour les lois usuelles).

Théorème

Soient E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. $g \circ f$ est une application linéaire : $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

- **Remarque.** $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

- **Conséquence.** Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, $f^0 = \text{Id}_E$ et $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ si $n \geq 1$.

Si f et g commutent $(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$

$$f^n - g^n = (f - g) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}$$

Théorème

Si f est un isomorphisme de E sur F , alors f^{-1} est linéaire.

- **Remarque.** $(GL(E), \circ)$ est un groupe (groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$).

2 Noyau et image d'une application linéaire

- **Cadre.** f est une application linéaire de E dans F .

2.1 Définitions

Définition

- Le *noyau* de f , noté $\text{Ker } f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f : $\text{Ker } f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E
- L'*image* de f est : $\text{Im } f = f(E) = \{f(x), x \in E\}$. C'est un sous-espace vectoriel de F
- $x \in \text{Ker } f$ signifie : $f(x) = 0_F$
- $y \in \text{Im } f$ signifie : il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$

Théorème

- Si E_1 est un sous-e.v. de E alors $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F .
- Si F_1 est un sous-e.v. de F alors $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E .

2.2 Noyau : détermination pratique, lien avec l' injectivité

Théorème : Injectivité et noyau

f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

Rédaction : pour montrer que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective

Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$. . .

Donc $x = 0_E$.

2.3 Image : détermination pratique, lien avec la surjectivité

Théorème : Surjectivité et image

f est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$.

3 Applications linéaires et bases

- Cadre. $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ est une base de E

3.1 Utiliser une base de E pour déterminer $\text{Im } f$

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. $\text{Im } f = \text{Vect}\left(f(b_i)\right)_{i \in I}$.

- Remarque. Il suffit que $(b_i)_{i \in I}$ soit génératrice de E

3.2 Base de E et injectivité surjectivité ou bijectivité

Théorème

Soit f une application linéaire de E dans F .

- i) f est injective si et seulement si $(f(b_i))_{i \in I}$ est libre
- ii) f est surjective si et seulement si $(f(b_i))_{i \in I}$ est génératrice de F
- iii) f est bijective si et seulement si $(f(b_i))_{i \in I}$ est une base de F

3.3 Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base ou une somme directe

Définition

Soit $j \in I$. La j^{e} forme coordonnée de E est la forme linéaire : $\varphi_j : E \rightarrow \mathbb{K}$
Elle vérifie : • $\varphi_j(b_j) = 1$ • $\varphi_j(b_i) = 0$ pour tout $i \neq j$

$$x = \sum_{i \in I} x_i b_i \mapsto x_j$$

Théorème : « Interpolation linéaire »

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F .

Il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(b_i) = u_i$.

- Conséquence. Pour définir $f \in \mathcal{L}(E, F)$ il suffit de définir les valeurs de f sur les vecteurs d'une base de E .

Théorème

On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$. Soient $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$.

Il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : • $f|_{E_1} = f_1$ • $f|_{E_2} = f_2$

3.4 Espaces de dimension finie isomorphes

Théorème

On suppose E de dimensions finies.

F est isomorphe à E ssi F est de dimension finie et : $\dim E = \dim F$.

4 Rang d'une application linéaire

- Cadre. $f \in \mathcal{L}(E, F)$

4.1 Définition du rang

Définition

- f est dite de *rang fini* si $\text{Im } f$ est de dimension finie.
- En ce cas on pose $\text{rg } f = \dim \text{Im } f$

- Remarque. Si E est de dimension finie muni d'une base (b_1, \dots, b_n) alors f est de rang fini et $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(b_1), \dots, f(b_n))$.

4.2 Théorème du rang

Théorème : Forme géométrique du théorème du rang

On suppose que $\text{Ker } f$ possède un supplémentaire S dans E . Dans ce cas $\varphi : S \rightarrow \text{Im } f$ est un isomorphisme de S sur $\text{Im } f$ (isomorphisme *induit* par f)
 $x \mapsto f(x)$

Théorème : Théorème du rang

Si E est de dimension finie : $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$

Théorème : Miracle de la dimension finie

On suppose E et F de même dimension finie. Alors il y a équivalence entre :
i) f est injective ii) f est surjective iii) f est bijective

- Remarque. Le théorème s'applique en particulier lorsque f est un endomorphisme en dimension finie.

4.3 Rang et composition

Théorème

Si E est de dimension finie et si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors :

- $f \in GL(E) \Leftrightarrow \exists g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = \text{Id}_E$
- $f \in GL(E) \Leftrightarrow \exists g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = \text{Id}_E$

Théorème : Rang d'une composée

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ de rang fini.

L'application $v \circ u$ est de rang fini et $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg } u, \text{rg } v)$

Théorème : Composer par un isomorphisme ne modifie pas le rang

On suppose E, F et G de dimensions finies. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

- Si f est un isomorphisme : $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$
- Si g est un isomorphisme : $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$