Cette feuille est composée d'exercices ou résultats de cours qui ont tous été corrigés ou démontrés en classe.
La colle débutera par la présentation d'un de ces exercices, celui-ci sera noté sur 8 points.
Plus que de simplement savoir les résoudre, le but est d'être capable d'en exposer clairement la solution à quelqu'un : suivant les cas, cela peut par exemple impliquer de savoir synthétiser les idées principales, de préciser quels résultats du cours sont mis en jeu, d'effectuer efficacement les calculs ...

1 Les anciens ...

Rappels sur l'étude de fonctions, convexité

Exercice 1 *Théorème et exemple de cours, chap 0 (II)* —

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que f' est croissante sur I. Montrer que pour tous $a, x \in I$: $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Interpréter graphiquement cette inégalité.
2. Etablir : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$.

Exercice 2 *Exemple de cours, chap. 1 (I)* — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x) - f(y) = (x-y)f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Exercice 3 *Théorème de cours, chap 1 (II)* — Montrer que si f est convexe sur un intervalle I alors pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$ *(On ne demande pas ici de démontrer l'implication réciproque)*

Exercice 4 *Théorème de cours, chap 1 (II) (démontré dans la partie II du chap 2)* —
Enoncer et démontrer l'inégalité de Jensen.

Sommes

Exercice 5 *Ex. de cours, chap.3 (II.3)* — Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos kx$.

Exercice 6 *Résultat de cours, chap. 2 (III)* —
Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$.

Exercice 7 *Exercice feuille 2* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Nombres complexes

Exercice 8 *Exercice feuille 3* — Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer le module de $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 9 *Exercice de cours chap 3, III* — Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$.
Montrer que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ avec égalité ssi $z_1, \ldots, z_n$ ont même argument.

Exercice 10 *Exercice de cours, chap. 5 (I.1)* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.
2. Montrer que les solutions sont réelles et les exprimer simplement à l'aide des fonctions cosinus et sinus.

Fonctions usuelles

Exercice 11 *Exercice feuille 4* — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de α, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $e^x = x^\alpha$.

Exercice 12 *Résultats de cours, chap. 4 (IV)* —

1. Rappeler l'expression de la dérivée de Arcsin sur $]-1, 1[$.
2. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$: $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$
3. Démontrer la formule de la question 1.

Exercice 13 *Exemple de cours, Chap 4, IV.2* —
Résoudre l'équation d'inconnue x : $\operatorname{Arctan} 2x + \operatorname{Arctan} 3x = \frac{\pi}{4}$.

Primitives et équations différentielles

Exercice 14 *Exemple de cours, Chap 7, II.4* — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\pi - x)$.

Applications

Exercice 15 — Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$

1. *Cours, chap 9–II*. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. *Exercice feuille 8*. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 16 — Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$

1. *Cours, chap 9–II*. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. *Exercice feuille 8*. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Exercice 17 *Ex. de cours, chap 9–III* — On note f l'application $z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. On note Δ la droite d'équation $y = x$. Montrer que $f(\Delta) = i\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = i\mathbb{R}^*$.

Suites numériques

Exercice 18 —

1. *Démo de cours, chap 10, III –* Démontrer le théorème relatif à la convergence des suites adjacentes.
2. *Ex. de cours, chap 12, II.3* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.
Etudier la nature de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 19 *Exercice feuille 9* — Soit $a \in]0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n}(1+a^k)$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 20 *Exercice feuille 9 bis* — On considère une suite u strictement positive. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel $k<1$. Montrer que $u_n \to 0$.

Exercice 21 *Ex. de cours, chap 12 - I* — Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

Arithmétique des entiers relatifs

Exercice 22 *Ex. de cours, chap. 11, IV* — Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = 2^n - 1$. Montrer que si M_n est premier, alors n est premier.

Exercice 23 *Résultat et ex. du cours, chap 11, III.3* —

1. Démontrer le lemme de Gauss.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $7x+12y=3$.

Exercice 24 *Résultat, chap 11, IV.3* —
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit p un nombre premier. Montrer que : $n^p \equiv n\ [p]$.

Continuité

Exercice 25 *Résultat de cours, chapitre 13.0 – II* — Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est continue en a.

ii) Pour toute suite (u_n) d'éléments de I telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$: $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$

Exercice 26 *Résultat de cours, chapitre 13.0 – II* — Montrer que les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x)+f(y)$ sont les fonctions linéaires *i.e.* les fonctions de la forme $x \mapsto ax$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 27 *Exercice feuille 9-bis* —
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n(x) = x^n \ln x - 1$.

1. Montrer que l'équation $x^n \ln x = 1$ possède une unique solution x_n dans $[1,+\infty[$.
2. Montrer que (x_n) est décroissante.
3. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 28 *Exercice feuille 11* — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues en 0, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x)\cos x$.

Dérivabilité

Exercice 29 *Résultat de cours, chap 14.0, III–2* — *Formule de Leibniz*
Soient f, g de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. *On admet que fg est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*
Enoncer la formule donnant $(fg)^{(n)}$ et montrer le résultat par récurrence sur n.

Exercice 30 *Résultat de cours chap 14.0,II–3 et dém. de cours, chap 14.1,I–2* —

1. Enoncer le théorème de la limite de la dérivée.
   Démontrer ce résultat en utilisant l'égalité des accroissements finis.
2. Prouver que l'implication : (f est dérivable en a) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en a) est fausse. *on pourra considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :*
   $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ *pour tout* $x>0$ *et* $f(0)=0$.

Exercice 31 *Résultat et démonstration de cours, chap 14.1,I–2 et exo. feuille 12* —

1. Enoncer et démontrer le théorème de l'égalité des accroissements finis.
2. Etudier la limite en $+\infty$ de $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 32 *Dém. de cours, chap 14.1, I–3* — Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. Montrer que f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Groupes

Exercice 33 *Démonstration de cours, chap 15, II* — Soient $(G,\cdot)$ un groupe d'élément neutre e, $(G',\star)$ un groupe d'élément neutre e' et $f : G \to G'$ un morphisme de groupe. Montrer que f est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

Exercice 34 *Exercice feuille 13 (questions 1 et 2)* — Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$, non réduit à $\{0\}$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $H = p\mathbb{Z}$

Polynômes

Exercice 35 *Résultats de cours, chap 16, III* —
Enoncer et démontrer la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 36 *Exemple de cours, chap. 16, III* — Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si : $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$, alors a est racine d'ordre m de P (*On ne demande pas ici de montrer la réciproque*)

2 ... et les nouveaux

Polynômes

Exercice 37 *Théorème du cours, chap. 16, V* — On donne n réels distincts $x_1 < \cdots < x_n$ et n réels quelconques $y_1, \ldots, y_n$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_k) = y_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et que ce polynôme est donné par : $P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$ (où $L_1, \ldots, L_n$ sont les polynômes de Lagrange associés à $x_1, \ldots, x_n$).

Exercice 38 *Exercice feuille 14* — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose $P = (X+1)^n - e^{2ina}$.

a) Calculer les racines de P dans $\mathbb{C}$. **b)** En déduire : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$.

Matrices

Exercice 39 *Exercice feuille 15* — Déterminer les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 40 *Exercice feuille 15* — On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \dfrac{1}{4}(I_3 + J)$.

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On pose : $u_0 = v_0 = 0$, $w_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 2v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases}$
   Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 41 *Résultat de cours, Chap 17, II* — Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Fractions rationnelles

Exercice 42 *Cours : IV Ex 2b, chap 18* — Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{(t^2+t+1)(1+t)^3}\,dt$ pour $x > 0$

Exercice 43 *Exercice feuille 16* — Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4}{\cos^3\theta}\,d\theta$ (poser $t = \sin\theta$)

Exercice 44 *Exercice feuille 16* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega^k}$

Analyse asymptotique

Exercice 45 *Exercice feuille 17* — Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 46 *Résultat de cours (II chap 19.0) et ex. de cours (Ex 3 du I chap. 19.1)* —

1. Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Montrer que si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, à partir d'un certain rang, de : $u_n = \operatorname{sh}\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n}$

Espaces vectoriels

Exercice 47 *Résultat de cours, Chap 21, II.3* — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille finie de vecteurs de E.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) \leq p$.
2. Montrer que $\operatorname{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = p$ ssi $\mathscr{F}$ est libre.

Exercice 48 *Exercice feuille 19* — Soient $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$, tous distincts. On note D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$ et $\mathscr{C}(D)$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec D. Montrer que $(D^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $\mathscr{C}(D)$

Exercice 49 *Exercice feuille 19* — Soit $a \in \mathbb{C}$. On note F l'ensemble des suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$.
Déterminer une base du plan vectoriel F suivant la valeur de a.

Exercice 50 *Exemple de cours, Chap 21, III* — Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ montrer que l'ensemble F des fonctions paires et l'ensemble G des fonctions impaires sont des sous-espaces supplémentaires.

Intégration

Exercice 51 *Exercices de cours, Chap. 22, II* — Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$.

Montrer que : $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin nt\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 52 *Résultat de cours, Chap 22, III* — Soit I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Montrer que $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur I.

Exercice 53 *Exercices de cours, Chap. 22, III* — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue.

1. Montrer que si f est T-périodique alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$
2. Montrer que si f est paire, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

Exercice 54 *Exercice, feuille 20* — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,dt$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer grâce à une intégration par parties : $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
2. Etudier la monotonie de (W_n).
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que (u_n) est une suite constante.
4. En déduire un équivalent de W_n.

Exercice 55 *Exercice, feuille 20* — Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$

Montrer : $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{=} \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 56 *Exercice de cours, Chap 22, III* —

On considère la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$ définie sur $]1, +\infty[$.

1. *Traitée dans un exemple du I.2.* On note u la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Montrer que u est prolongeable par continuité en 1.
2. A l'aide de la fonction u, calculer la limite en 1^+ de la fonction H.