Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément

Exercices de cours

Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un élève pris en défaut de connaissance sur un des exercices de cours.

Exercice 1 *Exemple de cours, Chap 1, III* — Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = \cos\theta$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 2\cos\theta\, u_{n+1} - u_n$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \cos n\theta$.

Exercice 2 *Résultat de cours, chap. 1 (III)* —
1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a,b) \neq (0,0)$. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\varphi).$$
2. Résoudre l'équation : $\cos x + \sin x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 *Résultat de cours, Chap 2, II. 3* — Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$ et démontrer cette formule *sans récurrence* (connaissant la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$).

Exercice 4 *Exercice feuille 2* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Exercice 5 *Résultat de cours, Chap. 2 (III)* —
Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$.

RAPPELS ET COMPLEMENT SUR LES FONCTIONS (fonctions trigonométriques)

3 Fonctions trigonométriques

Attention : le formulaire de trigonométrie est à connaître !!!

Théorème : Propriétés des fonctions sin et cos

- cos et sin sont deux fonctions 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- La fonction cos est paire, la fonction sin est impaire.
- Les fonctions sin et cos sont dérivables et $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

Théorème : Utilisation du cercle trigonométrique

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
- Réciproquement pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2+y^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$

Théorème

Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ $\boxed{\cos\theta = \cos\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \varphi[2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv -\varphi[2\pi] \end{cases}}$ $\boxed{\sin\theta = \sin\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \varphi[2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta \equiv \pi-\varphi[2\pi] \end{cases}}$

Théorème : Réduction de $a\cos x + b\sin x$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a,b) \neq (0,0)$. On peut trouver $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\varphi)$$

Définition

La fonction *tangente* est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ par : $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.

Théorème : Propriétés de la fonction tan

i) La fonction tangente est π-périodique sur D
ii) La fonction tangente est impaire sur D
iii) La fonction tangente est dérivable sur D et : $\tan' = \dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.

- **Remarque.** Connaître l'allure du graphe de tan.

Théorème : Formules avec tan

$\boxed{\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}$ $\boxed{\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}}$ $\boxed{\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}}$

$\boxed{\cos a = \dfrac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}}$ $\boxed{\sin a = \dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}}$

SOMMES ET PRODUITS

1 Les symboles $\sum$ et $\prod$

1.1 Définitions

- **Cadre.** $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ sont des nombres réels ou complexes.
- **Notations.** • $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=} a_1+a_2+\cdots+a_n$ • $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \underset{\text{déf.}}{=} a_1\times a_2\times\dots a_n$
- **Retenir.** • $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)+a_{n+1}$ • $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)+a_{n+1}$
- **Remarque.** On définit de même $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$ et $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k$ pour tous $a_m,\dots,a_n$ tels que $m\le n$.
- **Sommes/produits de termes constants.** Pour $c\in\mathbb{C}$ • $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc}$ • $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} c = c^n}$

1.2 A quelle lettre a-t-on le droit pour l'indice de somme ?

i) La lettre k est une variable *muette*.

ii) ☢ **Attention** ☢ en présence de la lettre n, par exemple : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = \prod_{j=1}^{n} j = \cancel{\prod_{k=1}^{n} n}$

1.3 Généralisation

- **Cadre.** $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes indexée par un ensemble fini I
  - $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ désigne la somme de tous les éléments de la famille
  - $\displaystyle\prod_{i\in I}$ désigne le produit de tous les éléments de la famille
- **Convention des sommes et produits vides.** • $\displaystyle\sum_{i\in\varnothing} a_i = 0$ • $\displaystyle\prod_{i\in\varnothing} a_i = 1$

Théorème : Règles de base

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k) = \lambda\sum_{k=1}^{n} a_k$

ii) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\lambda a_k) = \lambda^n\prod_{k=1}^{n} a_k.$

2 Techniques de calcul

2.1 Téléscopage

Théorème : Sommes et produits télescopiques

$$\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k) = a_{n+1}-a_0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_0}$$

2.2 Exemples de changements d'indice

- **Le décalage.** $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}}$ • **Le renversement.** $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}}$
- **Remarque.** Pour une somme indexée à partir de 1 : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_{n+1-j}$

De manière générale, pour une somme indexée à partir de m : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_{m+n-j}$

2.3 Des sommes à connaître

Théorème

Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Théorème : Sommes géométriques

Soit $q\in\mathbb{C}$ et soient $m,n\in\mathbb{N}$ tels que $m\le n$.
En particulier, si $q\ne1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases}\dfrac{q^m-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\ne1\\ n-m+1 & \text{si } q=1\end{cases}}$$

Théorème : Factorisation de $a^n - b^n$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{C}$.
$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

3 Coefficients binomiaux et formule du binôme

3.1 Coefficient binomial

■ La définition

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$.

On définit le coefficient binomial « p parmi n », noté $\binom{n}{p}$ par :
$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-p+1)}^{p \text{ facteurs}}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

• **Remarque.** Pour $p < 0$ ou $p > n$ on pose $\binom{n}{p} = 0$.

■ Formulaire

Théorème : Formules à savoir sur les coefficients binomiaux

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$:

- *Symétrie :* $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- *Formule de Pascal :* $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$
- Si $p \neq 0$: $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

Théorème : Valeurs remarquables à connaître

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

3.2 Formule du binôme de Newton

Théorème : Formule du binôme

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

4 Sommes doubles

En pratique : on peut intervertir deux symboles $\sum$

$$\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$$

☢ **Attention** ☢ au cas où les bornes dépendent des indices, par exemple :

En pratique :

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}$$