Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercice de cours

Exercice 1 *Résultat de cours, Chap 21, II.3* — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
1. Montrer que $\operatorname{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) \leq p$.
2. Montrer que $\operatorname{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = p$ ssi $\mathscr{F}$ est libre.

Exercice 2 *Exercice feuille 19* — Soient $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$, tous distincts. On note D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$ et $\mathscr{C}(D)$ l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec D. Montrer que $(D^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $\mathscr{C}(D)$

Exercice 3 *Exercice feuille 19* — Soit $a \in \mathbb{C}$. On note F l'ensemble des suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$.
Déterminer une base du plan vectoriel F suivant la valeur de a.

Exercice 4 *Exemple de cours, Chap 21, III* — Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ montrer que l'ensemble F des fonctions paires et l'ensemble G des fonctions impaires sont des sous-espaces supplémentaires.

ESPACES VECTORIELS

1 Espaces vectoriels

1.1 La structure d'espace vectoriel

Définition

Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un *ensemble* E muni de deux lois :
i) une loi de composition interne $+$ appelée addition telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif ;
ii) une multiplication externe *i.e.* une application : : $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, \vec{x}) & \longmapsto & \lambda \cdot \vec{x} \end{array}$

qui vérifie les propriétés suivantes :
1. $\forall \vec{x} \in E,\ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
2. $\forall \vec{x} \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$
3. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$
4. $\forall \vec{x} \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{x} = \mu \cdot (\lambda \cdot \vec{x})$

1.2 Espaces vectoriels de références

Exemple 0 $\mathbb{K}$ — $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vecrtoriel.

Exemple 1 $\mathbb{K}^n$ — pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble des n-uplets est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour ses lois usuelles.

Exemple 2 $\mathbb{K}[X]$ — L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour ses lois usuelles.

Exemple 3 $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ — Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des matrices de taille (n, p) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour ses lois usuelles.

Exemple 4 $\mathscr{F}(X, E)$ — Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et X un ensemble non vide, on munit l'ensemble $\mathscr{F}(X, E)$ des fonctions de X dans E d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 5 $E \times F$ — Si E, F sont deux $\mathbb{K}$-e.v., $E \times F$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-e.v. La construction se généralise à $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ où $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

• **Remarque.** Tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$ espace vectoriel

Dans toute la suite, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.3 Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition

Soit $\mathscr{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille finie de vecteurs E.Un vecteur $\vec{x} \in E$ est une combinaison linéaire de la famille $\mathscr{F}$ (ou une combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$) s'il existe $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{u}_i$

• **Remarque.** • Familles d'un seul vecteur • Cas de la famille vide

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition

Définition

Soit F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :
• $F \neq \varnothing$, • F est stable par $+$ • F est stable par .

En pratique : montrer que F est un sous-espace vectoriel (méthode 1)

i) F *possède le vecteur nul :* $\vec{0}_E \in F$
ii) F *est stable par combinaisons linéaires :*

$$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in F^2, \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{y} \in F.$$

En pratique : pour montrer que F est un espace vectoriel

Le plus simple est de montrer que F est un **SOUS**-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

Théorème

Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E

2.2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Soit $\mathscr{F} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n)$ une famille de vecteurs de E.

Définition

On note Vect $\mathscr{F}$ ou $\mathrm{Vect}(\vec{u}_i)_{1\le i\le n}$ ou encore $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $\mathscr{F}$.

Théorème

Vect $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé *sous-espace vectoriel engendré par* $\mathscr{F}$.

Théorème : Caractérisation de « Vect »

Vect $\mathscr{F}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contienne $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\}$ *i.e.* :

- $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\} \subset \mathrm{Vect}\mathscr{F}$;
- Pour tout sous-espace vectoriel G de E, si : $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\} \subset G$, alors : $\mathrm{Vect}\mathscr{F} \subset G$

En pratique : montrer que F est un sous-espace vectoriel (méthode 2)

Il peut être utile de montrer que F s'écrit comme un Vect

3 Familles génératrices

3.1 Familles génératrices

Définition

Soit $\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{1\le i\le n}$ une famille finie de vecteurs de E. $\mathscr{F}$ est dite *génératrice* de E (ou engendre E) si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ *i.e.* :

- $\mathrm{Vect}\mathscr{F} = E$

ou encore • $\forall \vec{x} \in E, \quad \exists(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{u}_i$

- **Remarque.** Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Théorème

Si $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n,\vec{u}_{n+1})$ est une famille génératrice de E et si $\vec{u}_{n+1}$ est combinaison linéaire de $(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ alors $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n)$ est encore génératrice de E.

En pratique : pour trouver une famille génératrice de F

On écrit F comme un vect.

3.2 Bases

Définition

- Une famille finie $\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{1\le i\le n}$ de vecteurs de E est une *base de* E si tout vecteur de E est *d'une manière unique* combinaison linéaire de $\mathscr{F}$.
- Ou encore : $\forall \vec{x} \in E, \quad \exists!(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{u}_i$

- **Remarque.** La famille vide est une base de l'espace vectoriel $\{0_E\}$

3.3 Familles génératrices quelconques / parties génératrices

- **Cadre.** $\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de vecteurs de E

Définition

- $\vec{x} \in E$ est *combinaison linéaire* de $\mathscr{F}$ s'il est combinaison linéaire *d'une sous-famille finie* de $\mathscr{F}$.
- On définit de même le sous-espace engendré $\mathrm{Vect}\mathscr{F}$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathscr{F}$
- La famille $\mathscr{F}$ est dite *génératrice de* E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$.
- La famille $\mathscr{F}$ est une base de E si tout vecteur de E est d'une manière unique combinaison linéaire de $\mathscr{F}$

- **Vocabulaire.** Une famille $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ est *presque nulle* si tous les α_i sont nuls *sauf un nombre fini d'entre eux*. Un vecteur $\vec{x} \in E$ est ainsi combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ s'il existe une famille $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ *presque nulle* telle que : $\vec{x} = \sum_{i\in I} \alpha_i\vec{u}_i$

Définition

Soit A une partie de E.

- On définit $\mathrm{Vect}A$ comme l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A. $\mathrm{Vect}A$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.
- La partie A est dite *génératrice* de E lorsque : $\mathrm{Vect}A = E$.

4 Familles libres, bases

4.1 Familles libres

- **Cadre.** $\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{1\le i\le n}$ est une famille finie de vecteurs de E

Définition

- La famille $\mathscr{F}$ est *libre* si la seule combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ donnant le vecteur nul est celle où tous les coefficients sont nuls. Autrement dit, si :

  pour tout $(\alpha_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{K}^n$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$
- $\mathscr{F}$ est liée si elle n'est pas libre *i.e.* si :

  il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E$.

Théorème

Une famille est liée ssi un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres

- **Remarques:**
  - Une famille de deux vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  - La famille $(\vec{u})$ est libre ssi $\vec{u} \neq \vec{0}_E$.
  - La famille vide est libre.

Théorème

- Si $\mathscr{F}$ est libre alors toute sous-famille de $\mathscr{F}$ est libre.
- Si $\mathscr{F}$ est libre et si $\vec{u}_{n+1}$ n'est pas combinaison linéaire de $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ alors $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1})$ est encore libre.

Théorème

Une famille $(P_0, \ldots, P_n)$ de polynômes est *de degrés étagés* si $\deg P_k = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Une famille de polynôme de degrés étagés est libre.

4.2 Bases

- **Rappel.** Une famille finie $\mathscr{F} = (\vec{u}_i)_{1\le i\le n}$ de vecteurs de E est une *base de* E si tout vecteur de E est *d'une manière unique* combinaison linéaire de $\mathscr{F}$.

Théorème

Une famille est une base de E ssi elle est à la fois libre et génératrice.

- **Vocabulaire : bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$.**
- On pose $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, . . . , $\vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$.
  La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique.
- La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$.
- La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.

4.3 Familles libres quelconques / parties libres

Définition

Soit $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ une famille de vecteur de E. La famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ ou la partie $A = \{\vec{u}_i\}_{i\in I}$ est dite *libre* si *toutes ses sous-familles finies* sont libres. Elle *liée* dans le cas contraire.

En pratique : pour vérifier la liberté d'une famille infinie $(\vec{u}_i)_{i\in\mathbb{N}}$

On montre que la famille $(\vec{u}_i)_{1\le i\le n}$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Remarque.** Comme pour les familles finies, la famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ (ou la partie est $\{\vec{u}_i\}_{1\le i\le n}$) est *libre* si pour toute famille $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ **presque nulle** : $\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}_E \implies \forall i \in I, \quad \alpha_i = 0$

5 Complément : la notion d'algèbre

Définition

Une $\mathbb{K}$-algèbre est un ensemble A muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$ et d'une multiplication externe $\cdot$ telles que

i) $(A, +, \times)$ est un anneau
ii) $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tous $\vec{x}, \vec{y} \in A$: $(\lambda \cdot \vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (\lambda \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot (\vec{x} \times \vec{y})$.

Définition

Soit $(A, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Une *sous-algèbre* de A est une partie B de A telle que :
- B est un sous-anneau de $(A, +, \times)$
- B est un sous-espace vectoriel de $(A, +, \cdot)$

En pratique : pour montrer que B est une sous-algèbre de A

On vérifie que :

i) B possède l'élément neutre pour $\times$: $\vec{1}_A \in B$
ii) B est stable par combinaisons linéaires : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in B$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in B$.
iii) B est stable par multiplication : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in B$, $\vec{x} \times \vec{y} \in B$

DIMENSION

Dans ce qui suit, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et n un entier naturel.

1 Théorie de la dimension

Définition

E est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

1.1 Algorithme de la base incomplète

Théorème

Si E possède une famille génératrice de cardinal n alors toute famille libre de E possède au plus n éléments.

Théorème : Théorème de la base incomplète

Si E est de dimension finie, alors toute famille libre de E est complétable en une base de E. Précisément

• **Remarque.** Précisément, on a montré que si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice finie de E alors toute famille libre de E peut-être complétée en une base de E à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$.

Théorème : Théorème de la base extraite

De toute famille génératrice finie de E on peut extraire une base de E.

1.2 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème

Si E est de dimension finie, alors toutes ses bases sont finies et ont même cardinal.

Définition

Si E est de dimension finie, on appelle dimension de E le cardinal commun à toutes ses bases.

Théorème : Exemples fondamentaux

• $\dim \mathbb{K}^n = n$ • $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$ • $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$

Théorème : Espace produit

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$.e.v de dimensions finies : $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

2 Utiliser la dimension finie

2.1 Familles libres /génératrices en dimension finie

On suppose ici que E est de dimension finie n.

Théorème

1. Toute famille libre a au plus n éléments.
2. Toute famille de E génératrice a au moins n éléments.

Théorème

1. Toute famille libre de cardinal n est une base.
2. Toute famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

En pratique : pour montrer qu'une famille est une base de E

• On constate qu'elle est de cardinal $n = \dim E$ • On vérifie uniquement la liberté

2.2 Sous-espaces et dimension

Théorème

On suppose que E est de dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E :
• F est de dimension finie et $\dim F \leq n$. • $F = E$ ssi $\dim F = n$.

En pratique : raisonnement par « Inclusion dimension »

En dimension finie, étant donnés deux sous-espaces vectoriels F et G de E, pour montrer que $F = G$ on peut montrer que : • $F \subset G$ • $\dim F = \dim G$.

2.3 Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. (quelconque) et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

Définition

Le *rang* de $\mathscr{F}$ est la dimension de Vect$\mathscr{F}$: $\operatorname{rg}\mathscr{F} \underset{\text{déf.}}{=} \dim \operatorname{Vect}\mathscr{F}$

Théorème

1. On a toujours $\operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq p$. 2. $\operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$ ssi $\mathscr{F}$ est libre

3 Somme de sous-espaces

Dans toute cette partie, F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E.

3.1 Généralités

Définition

La somme de F et G est le sous-espace vectoriel $F + G \underset{\text{déf.}}{=} \{x + y, \quad x \in F,\ y \in G\}$

- **Remarques:** • $F + G$ contient les sous-espaces F et G.
- C'est le plus petit sev ayant cette propriété : si un sev H contient F et G alors $F+G \subset H$

En pratique : somme de « Vect »

Soient X et Y des parties de E.
Si $F = \operatorname{Vect} X$ et si $G = \operatorname{Vect} Y$ alors $F + G = \operatorname{Vect} X \cup Y$

Théorème : Formule de Grassmann

Si F, G sont de dimension finie alors $F + G$ l'est aussi et :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

3.2 Somme directe

Définition

On dit que F et G sont en somme *directe* si, pour tout vecteur z de $F + G$, il y a unicité de la décomposition sous la forme $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

- **Notation.** Lorsque F et G sont en somme directe, la somme est notée $F \oplus G$.

Théorème : Critère pratique

F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$

- **Base adaptée à une somme directe.**
- **Cadre.** F, G sont de dimension finie. $\mathscr{B}$ est une base de F, $\mathscr{C}$ une base de G

Théorème

Si F et G sont en somme directe alors $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ est une base de $F \oplus G$ appelée *base adaptée à la somme directe $F \oplus G$*.
En particulier $F \oplus G$ est de dimension finie et : $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

Théorème

Si $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ est une famille libre, alors F et G sont en somme directe.

3.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition

On dit que F et G sont *supplémentaires* si tout vecteur de E se décompose d'une manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

- **Remarque.** F et G sont supplémentaires ssi : $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$

3.4 Supplémentaires en dimension finie

Théorème : Critère à utiliser en dimension finie

On suppose E de dimension finie. Alors F et G sont en supplémentaires ssi

$$F \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim F + \dim G = \dim E$$

Théorème : Existence de supplémentaires en dimension finie

Si E est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel F de E possède au moins un supplémentaire.

L'adresse de la page des maths est : `https://mathieucathala.fr`