Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

• **Cadre.** • I est un intervalle non vide, non réduit à un point • a est un point de I ou une de ses extrémités • les fonctions sont définies sur $D = I$ ou $I \setminus \{a\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$

Exercice de cours

Aucun cette semaine, mais les étudiants doivent connaître parfaitement les développements limités usuels (développement limité en 0 à tout ordre de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan *et* tan *à l'ordre 3).*

Développements limités

1 Négligeabilité, domination

Dans cette partie et les suivantes on suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a. Lorsque $g(a) = 0$ on impose $f(a) = 0$.

1.1 Définitions

Définition

• On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a si : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$
On note alors $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$. (« f est un petit o de g »)

• On dit que f est *dominée* par g au voisinage de a si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note alors $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} O(g)$. (« f est un grand O de g »)

• **Cas des suites .** Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
On dit que u est négligeable devant v si : $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Théorème : Croissances comparées en $+\infty$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
• si $\alpha < \beta$: $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\beta)$ • si $\alpha > 0$: $(\ln x)^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\alpha)$ • si $\beta > 0$: $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{\beta x})$

Théorème : Croissances comparées en 0

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
• Si $\alpha < \beta$: $x^\beta \underset{x \to 0}{=} o(x^\alpha)$ • Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$: $|\ln x|^\beta \underset{x \to 0}{=} o(\frac{1}{x^\alpha})$

1.2 Règles de calcul

Théorème : Opérations sur les o

1. *Combinaisons linéaires.* Si $f_1 \underset{a}{=} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g)$ alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f_1 + \beta f_2 \underset{a}{=} o(g)$. On retiendra : « $\alpha \times o(g) + \beta \times o(g) \underset{a}{=} o(g)$ »
2. *Transitivité.* Si : $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors : $f \underset{a}{=} o(h)$.
3. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$ alors : $f_1 f_2 \underset{a}{=} o(g_1 g_2)$.
4. *Produit par une fonction.* Si : $f \underset{a}{=} o(g)$ alors : $f h \underset{a}{=} o(gh)$

Théorème : Fonctions de limite nulle

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff f(x) \underset{x \to a}{=} o(1)$$

• **Remarque.** $f(x) \underset{x \to a}{=} O(1)$ signifie : f est bornée au voisinage de a.

Théorème : Changement de variable

Si : $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ et $u(t) \xrightarrow[t \to \alpha]{} a$ alors : $f\big(u(t)\big) \underset{t \to \alpha}{=} o\Big(g\big(u(t)\big)\Big)$.

2 Equivalence

2.1 Généralités

Définition

f est équivalente à g au voisinage de a si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$, noté $f(x) \underset{x\to a}{\sim} (g(x))$ ou $f \underset{a}{\sim} (g)$

- **Cas des suites .** Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si $v_n \neq 0$ APCR, on dit que u est équivalent à v si : $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Théorème : Equivalence et négligeabilité

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$$

En pratique : pour trouver une fonction équivalente à une somme

On garde UN SEUL terme : le « plus gros »

- **Remarque.** Pour une fonction polynomiale $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d+1}x^{d+1} + \cdots + a_n x^n$ où a_d et a_n sont non nuls :
  - En $\pm\infty$: $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$ (monôme de plus haut degré)
  - En 0 : $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_d x^d$ (monôme de plus bas degré)

Théorème : Equivalence et signe

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g ont le même signe au voisinage de a.

Théorème : Equivalence et existence + valeur de la limite

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si g admet une limite en a (finie ou non) alors f admet la même limite.

Théorème : Equivalent par encadrement

Si : *i)* Au voisinage de a : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *ii)* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$

Alors : $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

2.2 Règles de calcul

Théorème

1. *Transitivité.* Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors : $f \underset{a}{\sim} h$.
2. *Produit.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors : $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$
3. *Quotient, inverse.* Si : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$,

   alors : $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$, en particulier : $\dfrac{1}{f_1} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g_1}$
4. *Puissances d'exposant CONSTANT*. On suppose $f > 0$ au voisinage de a.

   Si : $f \underset{a}{\sim} g$ alors : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.
5. *Equivalence avec une constante.* Si $\ell \in \mathbb{R}^*$: $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell \iff f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$
6. *Changement de variable.* Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{t\to\alpha} u(t) = a$ alors $f\big(u(t)\big) \underset{t\to\alpha}{\sim} g\big(u(t)\big)$.
7. *Substitution .* Si : $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$

☢ Propriétés FAUSSES ☢

1. *Somme.* $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ $\cancel{\implies}$ $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$
2. *Composition.* $f \underset{a}{\sim} g$ $\cancel{\implies}$ $\phi \circ f \underset{a}{\sim} \phi \circ g$

   en particulier : $f \underset{a}{\sim} g$ $\cancel{\implies}$ $e^f \underset{a}{\sim} e^g$
3. *Puissances d'exposant non constant.*

   Eviter le célèbre : $1 + \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ ~~donc~~ $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \cancel{\underset{x\to+\infty}{\sim}} 1^x = 1$.

3 Développements limités en un point (a est fini)

3.1 Généralités

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet en a un *développement limité d'ordre n* s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\quad f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$

3.2 Propriétés des développements limités

Théorème : Unicité

Si f possède un développement limité d'ordre n en a, alors la liste $(a_0, \ldots, a_n)$ des coefficients est unique.

- **Conséquence.** En cas d'existence, le DL_n en 0 d'une fonction paire ne comporte que des puissances paires.

Théorème : Primitivation

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in D$ et f dérivable sur D.

Si f' admet en a le DL_{n-1} : $\quad f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + o\big((x-a)^{n-1}\big).$

Alors f admet en a le DL_n : $\quad f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o\big((x-a)^n\big)$

Théorème : Formule de Taylor-Young

On suppose que $a \in D$ et que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D.

Alors f admet un DL_n en a, donné par : $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$

- **Remarque.** *Troncature à l'ordre p.* Un DL_n fournit pour tout $p \leq n$ un DL à l'ordre p en « oubliant » les termes d'ordre supérieur ou égal à p

3.3 Développements limités usuels

A connaître !

4 Opérations sur les développements limités

Combinaisons linéaires

On suppose ici que f et g admettent un DL_n en a.

En pratique : pour obtenir un DL_n de $\lambda f + \mu g$

Les DL_n de f et g se combinent termes à termes.

Produit

En pratique : pour obtenir un DL_n de fg

Les DL_n de f et g fournissent un développement de fg au moins d'ordre n.

- **Remarque : « gain d'ordre ».** Lorsqu'on cherche un DL_n en 0 de fg :
  - si $f(x) = x^p(a_p + \ldots)$, alors il suffit de développer g à l'ordre $n-p$
  - si $g(x) = x^q(\alpha_q + \ldots)$, alors il suffit de développer f à l'ordre $n-q$.

Exemples de composition de développements limités

Inverse (et quotient) de développement limités

En pratique : pour obtenir un DL_n de $\frac{1}{g}$

On se ramène à $\dfrac{1}{1+u(x)}$ avec $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

En pratique : pour obtenir un DL_n en 0 de $\frac{f}{g}$ lorsque $g(0) = 0$

Si g admet un DL_n de la forme $g(x) = (b_q x^q + \ldots)$, il suffit de :

1. Développer f et g à l'ordre $n+q$. 2. Simplifier le quotient par x^q

On est ainsi ramené à un DL de la forme $\dfrac{N(x)}{1+u(x)} = N(x) \times \dfrac{1}{1+u(x)}$.

Développement limité en un point a autre que 0

En pratique : on « pose » $g(h) = f(a+h)$

- On effectue un DL_n en 0 de $g : h \mapsto f(a+h)$
- On « revient » à x via « $h = x - a$ »

APPLICATIONS DES DEVELOPPEMENTS LIMITES

1 Recherche d'équivalents et de limites

1.1 Développements limités et équivalence

Supposons que f admet un DL_n en a à coefficients non tous nuls et notons a_p le premier coefficient non nul : $f(x) = a_p(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$

Théorème

- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$
- Au voisinage de a, f est du signe de $a_p(x-a)^p$

Pour trouver un équivalent de f au voisinage de a

Il suffit de trouver le premier terme non nul de son développement limité en a.

1.2 Recherche de limites

En pratique : pour lever une forme indéterminée

- On peut rechercher un équivalent simple de la quantité à étudier.
- Les développements limités permettent d'obtenir cet équivalent

2 Etude locale d'une courbe – étude de suites

2.1 Développement limité et prolongement $\mathscr{C}^1$

En pratique : montrer que f est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^1$

On peut utiliser les développements limités pour chercher les limites de f et f'.

2.2 Développement limité et tangente

Théorème

On suppose que f est définie sur $I \setminus \{a\}$.
Si f admet en a le DL_1 : $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$, alors :

- f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.
- f est dérivable en a, avec $f'(a) = a_1$.

En pratique : DL_1 et tangente

- L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est $y = a_0 + a_1(x-a)$.
- Un DL d'ordre supérieur donne la position courbe/tangente au voisinage de a.

2.3 Asymptotes (obliques) en $\pm\infty$

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que f est définie au voisinage de $+\infty$. La droite d'équation $y = ax + b$ est dite *asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$* si : $f(x) = ax + b + o\big(1\big)$

En pratique : (une) méthode pour rechercher une asymptote

- On peut éventuellement effectuer un DL_n de $g : h \mapsto hf\left(\frac{1}{h}\right)$ en 0 avec $n \geq 2$
- On « revient » ensuite à x via « $h = \frac{1}{x}$ »

2.4 Comportement asymptotique de suites

Théorème : Suites géométriques et factorielles

Pour tout $q \in \mathbb{R}$: $q^n = o(n!)$.

Théorème : Formule de Stirling (Admise)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

- **Développement asymptotique d'une suite implicite sur un exemple**