Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercice de cours

Aucun exercice de cours cette semaine.

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Adaptation des résultats d'arithmétique vus dans $\mathbb{Z}$: PGCD, PPCM, relation de Bézout, polynômes premiers entre eux, théorème de Bézout, lemme de Gauss et ses conséquences.

1 Factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1.1 Polynômes irréductibles

Définition

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est dit *irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$ si ses seuls diviseurs sont 1 et P à constante multiplicative non nulle près.

• **Remarque.** Les polynômes irréductibles sont les analogues dans $\mathbb{K}[X]$ des nombre premiers dans $\mathbb{Z}$.

Théorème : Lemme d'euclide

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible et soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si $P \mid AB$ alors $P \mid A$ ou $P \mid B$.

1.2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème : d'Alembert-Gauss (Admis)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine complexe.
En conséquence tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Théorème

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, non tous deux nuls. P et Q sont premiers entre eux ssi ils n'ont aucune racine commune dans $\mathbb{C}$.

En pratique : pour factoriser $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n

On cherche ses n racines complexes (comptées avec multiplicités).

• **A connaître.** $\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$ et $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$

1.3 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème : Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Tout polynôme non constant $\mathbb{R}[X]$ peut s'écrire comme un produit :
- de polynômes de degré 1
- et de polynômes de degré 2 discriminants strictement négatif

En pratique : pour factoriser dans $\mathbb{R}[X]$

1. On factorise dans $\mathbb{C}[X]$
2. On regroupe les facteurs conjugués : $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\operatorname{Re}\alpha X + |\alpha|^2$

• **A connaître.** $\boxed{(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos\theta X + 1}$

1.4 Décomposition en facteurs irréductibles

Théorème

i) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1
ii) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

Théorème

Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ est le produit d'un élément de $\mathbb{K}^*$ et de polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$; l'écriture est unique à l'ordre près des facteurs

• **Remarque.** Comme dans $\mathbb{Z}$, on peut utiliser la décomposition en facteurs irréductibles pour calculer
• les diviseurs d'un polynôme • un PGCD • un PPCM

2 Décomposition en éléments simples : le théorie

2.1 Corps des fractions rationnelles

Présentation rapide du corps des fractions rationnelles (construction admise du corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$), forme irréductible, degré, fonction rationnelle.

2.2 Zéros et pôles

Définition

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, *irréductible*, et soit $a \in \mathbb{K}$.

- a est *un zéro* de F si a est une racine de P
- a est *un pôle* de de F si : a est une racine de Q

2.3 Partie entière

Théorème

Soit F. Il existe un unique couple $(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$F = E + G \qquad \text{et} \qquad \deg G < 0$$

En pratique

E est le quotient dans la division euclidienne de A par B.

2.4 Les gros théorèmes (admis)

- **Cadre.** Etant donnée $F \in \mathbb{K}(X)$ on note :
  - E sa partie entière.
  - $a_1, \ldots, a_k$ ses pôles, de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_k$.

■ **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**

Théorème

F s'écrit de manière unique sous la forme

$$F = \underbrace{E}_{\text{partie entière}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\alpha_{i,1}}{X - a_i} + \frac{\alpha_{i,2}}{(X - a_i)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{i,m_i}}{(X - a_i)^{m_i}} \right)}_{\text{partie polaire associée à } a_i} = E + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X - a_i)^j}$$

où les $\alpha_{i,j}$ sont des complexes.

■ **Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**

Théorème

F s'écrit de manière unique sous la forme

$$F = E + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X - a_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\beta_{i,j} X + \gamma_{i,j}}{(X^2 + p_i X + q_i)^j}$$

où les $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, \gamma_{i,j}$ sont des réels.

3 Pratique de la décomposition en éléments simples

- **But.** Etant donnée $F \in \mathbb{K}(X)$, calculer les coefficients de sa DES.

Le point de départ

1. On détermine sa partie entière par une division euclidienne (elle est nulle si $\deg F < 0$)
2. On factorise le dénominateur pour trouver les pôles et leurs multiplicités.
3. On écrit la D.E.S. avec des coefficients indéterminés.

3.1 Cas des pôles simples

- **Cadre.** a est un pôle simple de $F(X)$, la décomposition en éléments simples est de la forme : $\quad F(X) = \dfrac{\alpha}{X-a} + G \quad$ où a n'est pas pôle de G.
- **Objectif.** On cherche à calculer le coefficient α.

Méthode du « cache »

On multiplie la décomposition en éléments simples par $(X-a)$ puis on évalue en a.

Théorème

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, avec $P \wedge Q = 1$, admettant a pour pôle simple : $\boxed{\alpha = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}}$

Exemple 1 Dans $\mathbb{C}(X)$: $\qquad \dfrac{1}{X^n-1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\omega_k}{X-\omega_k}$, où $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

3.2 Cas général

En pratique : calculer les coefficients de la décomposition

- *Méthode du « cache »*. Si a est pôle d'ordre m, le coefficient de $\dfrac{1}{(X-a)^m}$ s'obtient en mutlipliant par $(X-a)^m$ puis en évaluant en a.
- *Méthode* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xF(x)$. Lorsque $\deg F < 0$, le calcul de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xF(x)$ fournit une relation entre certains des coefficients.
- *Evaluer en des points particuliers* (qui ne sont pas des pôles)

3.3 Décomposition de $\frac{P'}{P}$

Théorème

Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$, soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ les racines de P et soient $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ leurs ordres : $\boxed{\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dfrac{m_i}{X-a_i}}$

4 Application au calcul de primitives de fractions rationnelles

- **But.** Etant donné $F \in \mathbb{R}(X)$ on cherche à calculer $\displaystyle\int_a^b F(t)\,dt$.

Méthode générale

On décompose F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, on est ramené à primitiver des « morceaux ».

Savoir parfaitement primitiver les « morceaux » suivants :

	Type 1	Type 2		Type 3
Fonction	Polynôme (partie entière)	$x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^k}$ ($a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$)		$x \mapsto \dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$ où $p^2-4q<0$
Primitive	Polynôme	• Si $k=1$: $x \mapsto \ln\lvert x-a\rvert$	• Si $k \geq 2$: $x \mapsto \dfrac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}$	*i)* On fait apparaître $\dfrac{u'}{u}$ *i.e.* on fait apparaître $2x+p$ au numérateur *ii)* Le « morceau » restant se primitive à l'aide d'un arctangente

L'adresse de la page des maths est : `https://mathieucathala.fr`