Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercice de cours

Exercice 1 *Exercice Feuille 15* — Déterminer les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2 *Exercice Feuille 15* — On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \frac{1}{4}(I_3 + J)$.

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On pose : $u_0 = v_0 = 0$, $w_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 2v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases}$
   Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 3 *Résultat de cours, Chap 17, II* — Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

CALCUL MATRICIEL

1 Notion matrices

1.1 L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n, p désigne deux entiers naturels non-nuls.

- **Définitions.** Matrice, taille d'une matrice, matrices carrées.

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice transposée $A^\top \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ (A^\top)_{i,j} = A_{j,i}.$$

Autrement dit les lignes de $A^\top$ sont les colonnes de A et inversement.

- **Remarque.** Pour toute $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $(A^\top)^\top = A$.
- **Matrices carrées particulières.** Une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite :
  - Diagonale si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.
  - Triangulaire supérieure si $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$ (inférieure si $a_{i,j} = 0$ pour $i < j$)

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- A est dite symétrique si $A^\top = A$ *i.e.* : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = a_{j,i}$.
- A est dite antisymétrique si $A^\top = -A$ *i.e.* : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = -a_{j,i}$.

1.2 Combinaisons linéaires de matrices

Définition

Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda A + \mu B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par : $\lambda A + \mu B \underset{\text{déf.}}{=} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})$

- **Remarque.** Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et toutes $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\left(\lambda A + \mu B\right)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$

Définition

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de taille (n,p) dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 et tous les autres 0.

Théorème

Toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire des $E_{i,j}$: $\quad A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, E_{i,j}$

2 Produit matriciel

2.1 Définition

Définition

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!],\ (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Attention à la condition de compatibilité :

Matrice de taille $(n,p) \times$ Matrice de taille $(p,q) =$ Matrice de taille (n,q)

2.2 Particularités et propriétés du produit

1. Le produit matriciel n'est pas commutatif en conséquence, $(AB)^2 \neq A^2B^2$ en général.
2. Un produit peut être nul sans qu'aucun des facteur ne soit nul. En particulier, une matrice non nulle peut avoir des puissances nulles (matrice nilpotente).

Théorème : Propriétés du produit matriciel

1. *Bilinéarité*. Pour toutes $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C, D \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:
   - $(\lambda A + \mu B)C = \lambda(AC) + \mu(BC)$
   - $A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD$
2. *Associativité*. Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$: $\quad (AB)C = A(BC)$
3. *Transposition*. Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$: $\quad (AB)^\top = B^\top A^\top$

2.3 Produits de matrices carrées particulières

Théorème

Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.

Théorème

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieure) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Théorème : Matrices élémentaires

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, pour tous $i, j, k, \ell \in [\![1\,, n]\!]$: $\quad E_{i,j}E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$

3 Produits de matrices carrées

3.1 L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition

La matrice identité de taille n est la matrice diagonale $I_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.

- **Remarque.** La matrice identité vérifie :
  - Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $I_n A = A I_n = A$.
  - Plus généralement : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda I_n)A = A(\lambda I_n) = \lambda A$. Les matrices de la forme λI_n sont appelées *matrices scalaires*.
- **Cas des matrices carrées.** $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau :
  - I_n est l'élément neutre pour la multiplication.
  - Cet anneau n'est pas commutatif : $AB \neq BA$ en général.

3.2 Puissances d'une matrice

- **Calcul par récurrence**
- **Utilisation de la formule du binôme**

Théorème

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\boxed{\text{Si } A \times B = B \times A}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$

- $\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}}$
- $\boxed{A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}}$

- **Remarque.** Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  - A commute avec la matrice I_n
  - Plus généralement, A commute avec les λI_n (matrices scalaires)
- **Application au calcul de A^p.**
- **Utilisation d'un polynôme annulateur** (sur un exemple, pas de théorie)

3.3 Application aux systèmes de suites récurrentes

Sur des exemples.

4 Matrices carrées inversibles

4.1 Généralités

- **Rappels.**
  - Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. Dans ce cas, B est unique, appelée *inverse* de A et notée $B = A^{-1}$
  - L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.
  - $\left(GL_n(\mathbb{K}), \times\right)$ est un groupe (groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

Théorème : (Rappels)

Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}^*$:
i) A^{-1} est inversible et : $(A^{-1})^{-1} = A$.
ii) AB est inversible et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
iii) A^p est inversible et : $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$.
iv) $A^\top$ est inversible et : $(A^\top)^{-1} = ({}^\top A^{-1})$

• *Petits exemples :*

- La matrice identité I_n est inversible et $(I_n)^{-1} = I_n$.
- La matrice nulle 0_n de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible.

Théorème

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si l'une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres alors A n'est pas inversible.

- **Cas particliers.** A n'est pas inversible si :
- une colonne est nulle • deux colonnes sont identiques
- **Remarque.** La réciproque est en fait vraie mais sera vue plus tard.

Théorème : (admis provisoirement)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

i) S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

ii) S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

En pratique : pour montrer que A est inversible et trouver son inverse

Il suffit de trouver une matrice B vérifiant *UNE des deux conditions i) ou ii)*

4.2 Quelques critères d'inversibilité

- **Exemple d'inversion en présence d'un *polynôme annulateur***
- **Le cas des matrices de taille (2,2) :**

Théorème

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Dans ce cas : $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}}$

- **Cas des matrices diagonales ou triangulaire**

Théorème

Une matrice diagonale ou triangulaire est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

5 Opérations élémentaires

5.1 Ecriture matricielle d'un système linéaire

- **Vocabulaire.** Tout système linéaire de n équations à p inconnues peut s'écrire sous forme matricielle : $AX = B$ où
  - $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est la colonne des inconnue.
  - $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est le second membre.
  - $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée matrice du système.
    Ainsi $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ est solution de (S) ssi X vérifie $AX = B$.
  - Le système $AX = B$ est compatible ssi B est combinaison linéaire des colonnes de A.

5.2 Matrices d'opérations élémentaires

Comme pour les système, on dispose de trois types d'opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:
Type 1. $L_i \longleftarrow \alpha L_i \quad (\alpha \neq 0)$. *Type 2.* $L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j \quad (i \neq j)$. *Type 3.* $L_i \longleftrightarrow L_j$.
On définit de même des opérations élémentaires sur les colonnes.

- **Interprétation en terme de produit matriciel.** Matrices d'opérations élémentaires.
- **Conséquence.** Effectuer une opération élémentaire sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par une matrice inversible (et opérer sur les colonnes revient à multiplier à droite par une matrice inversible).

5.3 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

En pratique : méthode du pivot pour calculer A^{-1}

- On transforme A en I_n par des opérations élémentaires sur les lignes de A.
- On effectue en parallèle les mêmes opérations sur I_n : elles transforment I_n en A^{-1}