Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercice de cours

Exercice 1 *Théorème du cours, chap. 16, V* — Soient $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $y_1,\dots,y_n \in \mathbb{K}$ quelconques. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_k) = y_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et que ce polynôme est donné par : $P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$ (où $L_1,\dots,L_n$ sont les polynômes de Lagrange associés à $x_1,\dots,x_n$).

Exercice 2 *Exercice feuille 14* — Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Trouver le reste de la division euclidienne de X^{2n} par $(X^2+1)^2$. *Pour vérification : on trouve* $(-1)^n(-nX^2+1-n)$.

Exercice 3 *Exercice feuille 14* — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose $P = (X+1)^n - e^{2ina}$.

a) Calculer les racines de P dans $\mathbb{C}$. **b)** En déduire : $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$.

Exercice 4 *Exercice feuille 14* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$

a) Pour $k \in [\![1,n-1]\!]$, calculer $P'(\omega_k)$ où $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ **b)** En déduire : $\prod_{k=1}^{n-1} P'(\omega_k) = n^{n-2}$

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

0 Construction de l'anneau des polynômes

Définition de l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficient dans $\mathbb{K}$ comme l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ nulles à partir d'un certain rang. Polynômes constants, polynôme nul. Opérations sur les polynômes (somme et produit). L'anneau $(\mathbb{K}[X],+,\times)$. Notation polynomiale.

1 Divisibilité et division euclidienne

1.1 Degré d'un polynôme

Définition

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $P \neq 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses coefficients (nulle apcr).
- Le degré de P est par définition le plus grand indice k tel que a_k est non nul.
- $d = \deg P$ signifie : $P = \sum_{k=0}^{d} a_k$ **et** $a_d \neq 0$.

- **Vocabulaire.** • a_d est le coefficient dominant de P • P est unitaire si $a_d = 1$
- **Remarques:** Par convention $\deg 0 = -\infty$.

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n

Théorème

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. • $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ • $\deg PQ = \deg P + \deg Q$

Théorème : $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Si $PQ = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$

- **Elements inversibles de $\mathbb{K}[X]$.** Il s'agit des polynômes constants non nuls

1.2 Composition

Définition

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On note $P \circ Q$ ou $P(Q)$ le polynôme $\sum_{k=0}^{n} Q^k$.

- **Remarque.** Si le polynôme Q n'est pas constant : $\boxed{\deg(P\circ Q) = \deg P \times \deg Q}$

1.3 Diviseurs, multiples

Définition

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A (ou que A est un multiple de B) si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

- **Polynômes associés.** Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$: $A \mid B$ et $B \mid A \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid A = \lambda B$

1.4 Division euclidienne

Théorème

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que : 1. $A = BQ + R$ 2. $\deg R \leq (\deg B) - 1$.
Q est le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.

2 Racines d'un polynôme

2.1 Evaluation d'un polynôme

- **Vocabulaire.** Evaluation d'un polynôme, fonction polynomiale associée.

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une racine de P dans $\mathbb{K}$ si $P(a) = 0$.

2.2 Racines et divisibilité

Théorème

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. $P(a) = 0$ ssi $(X - a)$ divise P

Théorème

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts.

$P(a_1) = \cdots = P(a_k) = 0$ ssi P est divisible par $\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - a_i)$.

2.3 Racines et degré

Théorème

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul. Si $\deg P = n$ $(n \in \mathbb{N})$ alors P a au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

En pratique : pour montrer que P est nul

- Si on sait que $\deg P \leq n$ et que P a (au moins) $n+1$ racines, alors $P = 0$.
- Si P a une infinité de racines, alors $P = 0$

- **Conséquence.** Si $P(a) = Q(a)$ en une infinité de valeurs $a \in \mathbb{K}$, alors $P = Q$ (*i.e.* P et Q ont mêmes coefficients).

3 Polynôme dérivé

3.1 Généralités

Définition

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $n \geq 1$. On pose $P' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k$

- **Conséquences .** • $P' = 0$ ssi $P \in \mathbb{K}$ • Si $\deg P \geq 1$: $\deg P' = f \deg P - 1$

3.2 Polynômes dérivés d'ordre supérieur

Théorème : Opérations

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

1. *Combinaisons linéaires.* $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$
2. *Formule de Leibniz.* $(PQ)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k)}$

Théorème : Formule de Taylor

Soit $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$: $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

3.3 Multiplicité d'une racine

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $a \in \mathbb{K}$. La *multiplicité* de a dans P est le plus grand $m \in \mathbb{N}$ tel que $(X-a)^m$ divise P. Autrement dit, a est racine de multiplicité m de P si

- $(X-a)^m \mid P$ et $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P
- ou encore si $P = (X-a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$.

Théorème

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré n (donc $n \in \mathbb{N}$).

- Si $a_1, \dots, a_k$ sont des racines distinctes de P de multiplicités au moins $m_1, \dots, m_k$ alors : $\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X-a_i)^{m_i}$ divise P
- P a au plus n racines comptées avec multiplicité.

3.4 Polynômes dérivés et racines

Théorème

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$. Il y a équivalence entre :
i) a est racine de multiplicité m de P
ii) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$

- **Conséquences.**
  - a est racine simple de P si et seulement si $P(a) = 0$ et $P'(a) \neq 0$.
  - Si a est de multiplicité $m \geq 1$ dans P alors a est de multiplicité $m-1$ dans P'.

Théorème

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. $(X-a)^m$ divise P ssi $P(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$.

4 Polynômes scindés, relations coefficients-racines

4.1 Polynômes scindés

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non constant de degré n. On dit que P est *scindé sur* $\mathbb{K}$ si :

- P se factorise dans $\mathbb{K}[X]$ en un produit de polynômes de degré 1 *i.e.* s'il est de la forme : $P = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$ pour certains $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$
- C'est équivalent à : P a (au moins) n racines comptées avec multiplicité

Exemple 1 -♥- $\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$ et $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$

4.2 Relations entre coefficients et racines

■ **Cas $n = 2$ (rappel)**

Si $P = aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$, alors $\boxed{z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}}$ et $\boxed{z_1 z_2 = \frac{c}{a}}$

En pratique : résolution de systèmes non-linéaires

Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ sont : les racines de $X^2 - sX + p$.

■ **Cas $n = 3$**

Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d = a(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) \in \mathbb{K}[X]$, alors

$$\boxed{z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{b}{a} \qquad z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \frac{c}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 z_3 = -\frac{d}{a}}$$

En pratique : résolution de systèmes non-linéaires

Les solutions de $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = \alpha \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \beta \\ z_1 z_2 z_3 = \gamma \end{cases}$ sont : les racines de $X^3 - \alpha X^2 + \beta X - \gamma$.

■ **Cas général**

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n(X - z_1) \times \ldots \times (X - z_n)$ un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ de degré n

Théorème

- $\sum_{i=1}^{n} z_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
- $\prod_{i=1}^{n} z_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

- **Remarque.** Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $\boxed{\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}}$

5 Interpolation de Lagrange

- **Données.** • $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ **distincts** • $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ quelconques

Définition

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit le polynôme L_i par : $L_i = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$

Ce polynôme est de degré $n-1$ et vérifie : $\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ L_i(x_k) = 0 \quad \text{pour } k \neq i \end{cases}$

$L_1, L_2, \ldots, L_n$ sont les *polynômes de Lagrange* associés à $x_1, \ldots, x_n$.

Théorème

Il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(x_k) = y_k$,

Ce polynôme est donné par : $P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$.