Cette feuille est composée d'exercices ou résultats de cours qui ont tous été corrigés ou démontrés en classe.
La colle débutera par la présentation d'un de ces exercices, celui-ci sera noté sur 8 points.
Plus que de simplement savoir les résoudre, le but est d'être capable d'en exposer clairement la solution à quelqu'un : suivant les cas, cela peut par exemple impliquer de savoir synthétiser les idées principales, de préciser quels résultats du cours sont mis en jeu, d'effectuer efficacement les calculs ...

1 Les anciens ...

Partie entière

Exercice 1 *Exercice feuille 0* — Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Rappels sur l'étude de fonctions, convexité

Exercice 2 *Théorème et exemple de cours, chap 0 (II)* —
1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que f' est croissante sur I. Montrer que pour tous $a, x \in I$: $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Interpréter graphiquement cette inégalité.
2. Etablir : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$.

Exercice 3 *Exemple de cours, chap. 1 (I)* — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x) - f(y) = (x-y) f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Exercice 4 *Théorème de cours, chap 1 (II)* — Montrer que si f est convexe sur un intervalle I alors pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$ *(On ne demande pas ici de démontrer l'implication réciproque)*

Exercice 5 *Théorème de cours, chap 1 (II) (démontré dans la partie II du chap 2)* — Enoncer et démontrer l'inégalité de Jensen.

Sommes

Exercice 6 *Ex. de cours, chap.3 (II.3)* — Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos kx$.

Exercice 7 *Résultat de cours, chap. 2 (III)* —
Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{C}$.

Exercice 8 *Exercice feuille 2* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

Nombres complexes

Exercice 9 *Ex. 29, feuille 3* — Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
1. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer le module de $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} \left| z^k - 1 \right|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 10 *Exercice de cours chap 3, III* — Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$.
Montrer que $\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ avec égalité ssi $z_1, \dots, z_n$ ont même argument.

Exercice 11 *Exercice de cours, chap. 5 (I.1)* — Soit $n \in \mathbb{N}^*$
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.
2. Montrer que les solutions sont réelles et les exprimer simplement à l'aide des fonctions cosinus et sinus.

Fonctions usuelles

Exercice 12 *Exercice feuille 4* — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de α, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $e^x = x^\alpha$.

Exercice 13 *Exercicefeuille 4* — Montrer que pour tout $x > 0$: $\operatorname{th} x < x < \operatorname{sh} x$.

Exercice 14 *Résultats de cours, chap. 4 (IV)* —
1. Rappeler l'expression de la dérivée de Arcsin sur $]-1, 1[$.
2. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$: $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$
3. Démontrer la formule de la question 1.

Exercice 15 *Exemple de cours, Chap 4, IV.2* —
Résoudre l'équation d'inconnue x : $\operatorname{Arctan} 2x + \operatorname{Arctan} 3x = \frac{\pi}{4}$.

Primitives et équations différentielles

Exercice 16 *Exemple de cours, Chap 7, II.4* — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = f(\pi - x)$.

Applications

Exercice 17 — Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$
1. *Cours, chap 9–II.* Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. *Exercice, feuille 8.* Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

2 ... et les nouveaux

Exercice 18 — Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$
1. *Cours, chap 9–II.* Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. *Exercice feuille 8.* Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Exercice 19 *Ex. de cours, chap 9–III* — On note f l'application $z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
1. On note Δ la droite d'équation $y = x$. Montrer que $f(\Delta) = i\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = i\mathbb{R}^*$.

Suites numériques

Exercice 20 —

1. *Démo de cours, chap 10, III –* Démontrer le théorème relatif à la convergence des suites adjacentes.
2. *Ex. de cours, chap 12, II.3* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.
Etudier la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 21 *Exercice feuille 9* **—** Soit $a \in]0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+a^k)$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 22 *Exercice feuille 9 bis* **—** On considère une suite u strictement positive.
On suppose que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel $k<1$. Montrer que $u_n \to 0$.

Exercice 23 *Ex. de cours, chap 12 - I* **—** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

Arithmétique des entiers relatifs

Exercice 24 *Ex. de cours, chap. 11, IV* **—** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = 2^n - 1$. Montrer que si M_n est premier, alors n est premier.

Exercice 25 *Résultat et ex. du cours, chap 11, III.3* **—**

1. Démontrer le lemme de Gauss.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $7x + 12y = 3$.

Exercice 26 *Résultat, chap 11, IV.3* **—**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit p un nombre premier. Montrer que : $n^p \equiv n\ [p]$.

Continuité

Exercice 27 *Résultat de cours, chapitre 13.0 – II* **—** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est continue en a.

ii) Pour toute suite (u_n) d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$: $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$

Exercice 28 *Résultat de cours, chapitre 13.0 – II* **—** Montrer que les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sont les fonctions linéaires *i.e.* les fonctions de la forme $x \mapsto ax$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 29 *Résultat de cours, chap 13.1, II.2* **—**
Enoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.

Exercice 30 *Exercice feuille 9-bis* **—**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction $x \mapsto x^n \ln x - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation $x^n \ln x = 1$ possède une unique solution x_n dans $[1, +\infty[$.
2. Montrer que (x_n) est décroissante.
3. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 31 *Exercice feuille 11* **—** Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues en 0, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(2x) = f(x)\cos x$.

Dérivabilité

Exercice 32 *Résultat de cours, chap 14.0, III–2* **—** *Formule de Leibniz*
Soient f, g de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. *On admet que fg est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*
Enoncer la formule donnant $(fg)^{(n)}$ et montrer le résultat par récurrence sur n.

Exercice 33 *Résultat de cours chap 14.0,II–3 et dém. de cours, chap 14.1,I–2* **—**

1. Enoncer le théorème de la limite de la dérivée.
Démontrer ce résultat en utilisant l'égalité des accroissements finis.
2. Prouver que l'implication : (f est dérivable en a) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en a) est fausse. *on pourra considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :*
$f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ *pour tout $x > 0$ et* $f(0) = 0$.

Exercice 34 *Résultat et démonstration de cours, chap 14.1,I–2 et ex. feuille 12* **—**

1. Enoncer et démontrer le théorème de l'égalité des accroissements finis.
2. Etudier la limite en $+\infty$ de $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 35 *Dém. de cours, chap 14.1, I–3* **—** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. Montrer que f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Groupes

Exercice 36 *Démonstration de cours, chap 15, II* **—** Soient $(G, \cdot)$ un groupe d'élément neutre e, $(G', \star)$ un groupe d'élément neutre e' et $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.
Montrer que f est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

Exercice 37 *Exercice feuille 13 (questions 1 et 2)* **—**
Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, non réduit à $\{0\}$.
Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $H = p\mathbb{Z}$

Exercice 38 *Exercice feuille 13 (et exemple de cours II.2)* **—**

1. Soit $(G, \star)$ un groupe commutatif fini de cardinal n et $g \in G$. Montrer, en calculant de deux manières le produit $\prod\limits_{x\in G}(g\star x)$, que $g^n = e$.
2. Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Polynômes

Exercice 39 *Exo de cours, chap 15, III* **—** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer en exploitant une égalité polynomiale que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 40 *Résultats de cours, chap 16, III* **—**
Enoncer et démontrer la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 41 *Exemple de cours, chap. 16, III* **—** Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que si : $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$, alors a est racine d'ordre m de P (*On ne demande pas ici de montrer la réciproque*)