Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

- **Cadre.** • I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point • a est un point de I • $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Exercice 1 *Résultat de cours, chap 14.1, I* — Enoncer et démontrer le théorème de Rolle.

Exercice 2 *Résultat de cours chap 14.0,II–3 et dém. de cours, chap 14.1,I–2* —

1. Enoncer le théorème de la limite de la dérivée. Démontrer ce résultat en utilisant l'égalité des accroissements finis.
2. Prouver que l'implication : (f est dérivable en a) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en a) est fausse. *on pourra considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :* $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ *pour tout* $x > 0$ *et* $f(0) = 0$.

Exercice 3 *Exo de cours, chap 14.1,I–1* — Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ ($n \geq 1$). On suppose que f s'annule en au moins $n+1$ points distincts. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.

Exercice 4 *Résultat et démonstration de cours, chap 14.1,I–2 et ex. feuille 12* —

1. Enoncer et démontrer le théorème de l'égalité des accroissements finis.
2. Etudier la limite en $+\infty$ de $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 5 *Dém. de cours, chap 14.1, I–3* — Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. Montrer que f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

DERIVABILITE

1 Dérivée en un point

1.1 Définition

Définition

f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ possède une limite finie quand x tend vers a. En ce cas on pose : $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$.

- **Vocabulaire et notation.** On dit que f est *dérivable à droite en a* si son taux d'accroissement en a possède une limite finie à droite en a. On pose alors : $f'_d(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On définit de même la dérivée à gauche $f'_g(a)$.

Théorème

Supposons que a soit un point intérieur à I. Dans ce cas f est dérivable en a ssi f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_d(a) = f'_g(a)$

1.2 Dérivabilité et continuité

Si f est dérivable en a pour tout $x \in I$: $\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)}$ où $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

Théorème

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Attention La réciproque est fausse.

1.3 Extremum local

Définition

f possède un maximum local en a si, au voisinage de a, $f(x) \leq f(a)$

Théorème

On suppose que a est un point intérieur à I et que f est dérivable en a. Si f possède un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Attention La réciproque est fausse.

- **Vocabulaire.** Un $a \in I$ en lequel f est dérivable et $f'(a) = 0$ est un *point critique* de f

2 Justifier la dérivabilité

2.1 Opération sur les dérivées

Théorème : Opérations algébriques

Soient u,v deux fonction dérivables en a et soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Alors

1. *Linéarité :* $\lambda u + \mu v$ est dérivable en a et : $(\lambda u+\mu v)'(a) = \lambda u'(a) + \mu v'(a)$,
2. *Produit :* uv est dérivable en a et : $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.
3. *Quotient :* Si $v(a) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en a et $\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a)v(a)-u(a)v'(a)}{v^2(a)}$

Théorème : Composition

Soient $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : J \to \mathbb{R}$. On suppose u à valeurs dans J. Si u est dérivable en a et si v est dérivable en $u(a)$ alors $v \circ u$ est dérivable en a et :

$$(v\circ u)'(a) = u'(a) \times v'(u(a))$$

- **Cas particuliers à savoir:** Les dérivées des composées usuelles u^α, e^u, $\ln(u)$, ...

En pratique :

Il faut savoir justifier proprement la dérivabilité d'une composée.

2.2 Dérivation des fonctions réciproques

Théorème : Réciproque

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue et strictement monotone sur I.On pose $b = f(a)$. On suppose que f dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en b et :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

2.3 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème : Théorème de la limite de la dérivée

On suppose que : • f est continue sur $[a,b[$ • f est dérivable sur $]a,b[$

Si $f'(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non), alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

- **Remarque.** Même conclusion si :
- f est continue sur $]a,b]$ • f est dérivable sur $]a,b[$ • $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x) = \ell$
- **Remarque.** Même conclusion si :
- f est continue sur I • f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ • $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} f'(x) = \ell$
- **Conséquence.** Lorsque ℓ est finie, f est dérivable en a et f' est continue en a

3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

- **Notation.** On définit par récurrence les *dérivées successives* de f :
- $f^{(0)} = f$ • Si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est dérivable, $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si :
- f est n fois dérivable sur I • La fonction $f^{(n)}$ est continue sur I

- **Vocabulaire.** f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou encore si f est indéfiniment dérivable.

3.1 Opérations sur les fonction de classe $\mathscr{C}^n$

Théorème : Opérations algébriques version $\mathscr{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $f,g : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^n$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.
- *Combinaisons linéaires.* $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ et $(\lambda f+\mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
- *Formule de Leibniz* fg est de classe $\mathscr{C}^n$ et $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
- *Quotient.* Si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

Théorème : Composition version $\mathscr{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si : *i)* v est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J *ii)* u est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, à valeurs dans J alors $v \circ u$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I

Théorème : Réciproque version $\mathscr{C}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si :
i) f est une bijection de I sur J
ii) f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I
iii) f' NE S'ANNULE PAS SUR I
alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ sur J.

3.2 Variante $\mathscr{C}^1$ du théorème de la limite de la dérivée

En pratique : montrer que f se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur I

- On justifie que f est $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ par opérations.
- On étudie $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pour prolonger f par continuité en a.
- On étudie $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x)$ pour appliquer le théorème de la limite de la dérivée et ainsi montrer que f est dérivable en a et que f' est continue en a.

ACCROISSEMENTS FINIS

1 Rolle et égalité des accroissements finis

1.1 Théorème de Rolle

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :
i) f est continue sur $[a,b]$.
ii) f est dérivable sur $]a,b[$.
iii) $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in\,]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1.2 Egalité des accroissements finis

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que :
i) f est continue sur $[a,b]$.
ii) f est dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe $c \in\,]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- **Graphiquement.** $\mathscr{C}_f$ a une tangente parallèle à la corde reliant $(a,f(a))$ à $(b,f(b))$

1.3 Variations et convexité d'une fonction f dérivable sur I

- **Cadre.** $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.

Démonstration des resultats suivants (précédemment admis) :
- f est croissante sur I ssi $f' \geq 0$ sur I.
- f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Théorème

f est strictement croissante si et seulement si :
i) $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$,
ii) f' n'est nulle sur aucun intervalle $[a,b]$ avec $a < b$.

- **Remarque.** Le théorème s'applique en particulier si :
- f' ne s'annule jamais • f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois

2 Inégalité des accroissements finis

2.1 Inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I.
On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq k$.
Alors : $\quad \forall x,y \in I, \quad \left|f(x)-f(y)\right| \leq k\left|x-y\right|$.
On dit dans ce cas que la fonction f est k-lipschitzienne.

2.2 Application à l'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

- **But.** Montrer que la suite (u_n) converge vers un point fixe α de la fonction f.
- **Hypothèse fondamentale.** On trouve $k \in\,]0,1[$ tel que : $\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq k$.

En pratique : les étapes clés pour montrer que $u_n \to \alpha$

- *Application de l'IAF.* Pour tout n, $\quad |f(u_n) - f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha|$
c'est à dire : $\quad |u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$
- *Par récurrence sur n.* $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$.
- *Théorème d'encadrement.* Puisque $k \in [0,1[$: $\quad k^n \to 0$ et donc : $\quad |u_n - \alpha| \to 0$
i.e. $u_n \to \alpha$.

L'adresse de la page des maths est : `https://mathieucathala.fr`