Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercice de cours

Exercice 1 *Résultat de cours, chapitre 13.0 – II* — Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en a.
2. Pour toute suite (u_n) d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$: $\quad f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$

Exercice 2 *Résultat de cours, chapitre 13.0 – II* — Montrer que les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$ sont les fonctions linéaires *i.e.* les fonctions de la forme $x \mapsto ax$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 *Résultat de cours et exemple de cours, chapitre 13.1 – II.1* —

1. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$.
   Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 4 *Exercice de cours, chapitre 13.0 – III* — On suppose f convexe sur $]a,b[$. Soit $c \in]a,b[$. Montrer que f est continue en c.

Exercice 5 *Exemple de cours, chapitre 13.1 – II.3 et exercice 1 feuille 9-bis* —
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note f_n la fonction $x \mapsto x^n \ln x - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation $x^n \ln x = 1$ possède une unique solution x_n dans $[1, +\infty[$.
2. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

LIMITE D'UNE FONCTION

Dans ce chapitre, I est un intervalle non vide et non réduit à un point, a est un point de I ou l'une de ses extrémités, f est une fonction réelle définie sur $\mathcal{D}_f = I$ ou $I \setminus \{a\}$.

1 Définition de la limite d'une fonction

1.1 Limite en un point (a est fini)

Définition

- On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en a si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \cap [a-\alpha, a+\alpha], \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
- f admet $-\infty$ pour limite en a si
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \cap [a-\alpha, a+\alpha], \quad f(x) \leq A.$$

1.2 Limites à l'infini ($a = \pm\infty$)

Définition

- On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$ si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \cap [A, +\infty[, \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
- On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \cap]-\infty, B], \quad f(x) \geq A.$$

1.3 Premières propriétés

Théorème

Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Théorème

Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell > 0$, alors f est strictement positive au voisinage de a.

Théorème

Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et si g est bornée au voisinage de a, alors : $\quad f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

1.4 Demi-limites

- Définitions des limites à droite et à gauche en un point a intérieur à I.
- **Remarque.** f peut admettre en a des demi-limites autres que $f(a)$.

Théorème : Limite $\leftrightsquigarrow$ Limites à droite et à gauche

- Si $a \notin \mathcal{D}_f$ alors f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite à gauche et à droite en a ET $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.
- Si $a \in \mathcal{D}_f$ alors f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite à gauche et à droite en a ET $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \boxed{f(a)}$.

2 Continuité en un point

2.1 Définition de la continuité

- **Cadre.** $\mathscr{D}_f = I$ *i.e.* f est définie en a

Définition

1. f est continue en a si : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
2. f est continue à gauche (resp. à droite) si $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} f(a)$ (resp. $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} f(a)$)

Théorème

Supposons que a soit un point intérieur à I.
Dans ce cas f est continue en a ssi f est continue à gauche et à droite en a

2.2 Prolongement par continuité

- **Cadre.** $\mathscr{D}_f = I \setminus \{a\}$ (*i.e.* f n'est pas définie en a).

Définition

f est prolongeable par continuité en a si f admet une limite finie ℓ en a.

- **Vocabulaire.** On note $\widetilde{f}$ définie sur I par : $\forall x \in I,\ \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$
  - Par construction la fonction $\widetilde{f}$ est continue en a.
  - $\widetilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en a

2.3 Caractérisation séquentielle de la continuité

- **Cadre.** $\mathscr{D}_f = I$ (f est définie en a).

Théorème

Il y a équivalence entre :
i) f est continue en a
ii) Pour toute suite (u_n) d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$: $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$

- **Conséquence.** Justifie le critère « $\ell = f(\ell)$ » pour les suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

3 Existence et/ou calcul de limites

3.1 Opérations algébriques sur les limites (cf suites)

3.2 Composition de limites

Théorème : Fonctions et suites

Pour a, ℓ finis ou non, il y a équivalence entre
1. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$
2. Pour toute suite (u_n) d'éléments $\mathscr{D}_f$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ on a $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

En pratique : pour montrer que f n'admet pas de limite en a

On peut construire deux suites u, v telles que :
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

Théorème : Fonctions et fonctions

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ à valeurs dans J et soit $g : J \to \mathbb{R}$.
Si : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$ alors : $g(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ $(a, b, \ell \in \overline{\mathbb{R}})$

3.3 Limites et inégalités larges

Théorème : Passages aux limites dans les inégalités larges

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que :
i) $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_2$
ii) Au voisinage de a : $f(x) \leq g(x)$,
alors : $\ell_1 \leq \ell_2$

3.4 Théorèmes pour prouver l'existence de limites

Théorème : Limite par encadrement

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que :
i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ *ii)* Au voisinage de a : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
alors : $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème : majoration / minoration

On suppose qu'au voisinage de a : $f(x) \leq g(x)$.

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, alors $g(x)$ tend vers $+\infty$ en a.
- Si $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, alors $f(x)$ tend vers $-\infty$ en a.

Théorème : Théorème de la limite monotone (cas croissante)

On suppose que f est croissante sur $]a,b[$:

- Si f est majorée, alors f admet en b^- une limite finie ℓ
- Si f n'est pas majorée, alors $f(x) \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} +\infty$.

• Enoncés analogues avec f décroissante et/ ou la limite en a.

• **Conséquence.** En tout $c \in]a,b[$, f a des demi limites finies et $\lim_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim_{c^+} f$

CONTINUITE EN SUR UN INTERVALLE

1 Justifier la continuité de f sur l'intervalle I

En pratique : on combine deux ingrédients

- *Ingrédient n° 1*. La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues (et composables) sont des fonctions continues sur I
- *Ingrédient n° 2*. La continuité des fonctions usuelles sur leur ensemble de définition.

2 Trois grands théorèmes de continuité

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Sur $[a,b]$, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

• **Remarque.** Le TVI assure que si I est un intervalle, alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème : TVI strictement monotone

Si : *i)* f est continue sur $I = [a,b[$ (b fini ou non).
ii) f est strictement croissante sur I
iii) Aux bornes : $f(a) = \alpha$ et $f(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell$ (finie ou non)
Alors f est bijective de $[a,b[$ sur $[\alpha,\ell[$.

• Enoncés analogues avec f strictement décroissante et/ou $I =]a,b]$, $]a,b[$ ou $[a,b]$

2.2 Fonction continue sur un segment

Théorème

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur le segment $[a,b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes.
- Autrement dit f possède sur $[a,b]$ un maximum et un minimum : $f([a,b]) = [m,M]$ où : $m = \min_{[a,b]} f$ et $M = \max_{[a,b]} f$

Attention à la formule **fausse** $\cancel{f([a,b]) = [f(a), f(b)]}$

2.3 Continuité d'une réciproque

Théorème

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I et injective alors f est strictement monotone

Théorème : Continuité des fonctions réciproques

On suppose $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur l'intervalle I. On sait que f est bijective de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

1. f^{-1} est strictement monotone sur J de même sens que f.
2. f^{-1} est continue sur J.

L'adresse de la page des maths est : `https://mathieucathala.fr`