Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercice de cours

Exercice 1 *Cours, chap 12, I* — Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
1. Donner la définition « u est convergente »
2. Démontrer la propriété d'unicité de la limite.

Exercice 2 *Cours, chap 12, I* — Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, convergente. Montrer que u est bornée

Exercice 3 *Ex. de cours, chap 12, II.3* —
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Etudier la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4 *Exercice feuille 9 bis* — On considère une suite u strictement positive. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel $k < 1$. Montrer que $u_n \to 0$.

Exercice 5 *Ex. de cours, chap 12, IV* — Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, croissante et majorée. *Démontrer* que u converge.

Exercice 6 *Cours, chap 12, IV* — Soit A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A. Démontrer l'équivalence entre :
i) $M = \sup A$
ii) Il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$.

SUITES - niveau 1

Tout le chapitre reste au programme.

SUITES - niveau 2

1 Limite d'une suite

1.1 Suites convergentes

Définition

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est *convergente* s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

- **Notation.** On écrit : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

1.2 Propriétés des suites convergentes

Théorème

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Dans le cas où u est convergente le réel ℓ est unique appelée limite de u et noté $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
- Dans le cas contraire, on dit que u est *divergente*.

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Attention Réciproque fausse : $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne converge pas

Théorème

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u converge vers $\ell > 0$, alors u est strictement positive à partir d'un certain rang.

1.3 Suites tendant vers l'infini

Définition

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que :
- u tend vers $+\infty$ si :
$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0,\ u_n \geq A$$
On note $u_n \to +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$.
- u tend vers $-\infty$ si :
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq A$$

Attention
- Diverger ne signifie pas tendre vers $\pm\infty$. Une suite diverge si elle admet une limite infinie ou si elle n'admet pas de limite.
- Une suite qui n'est pas bornée ne tend pas forcément vers $\pm\infty$. Par exemple la suite $\left((-1)^n n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée mais n'admet pas de limite.

2 Suites extraites

2.1 Définition

Définition

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que v est une *sous-suite* ou *suite extraite* de u s'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

Théorème

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \varphi(n) \geq n$.

2.2 Limite et suites extraites

- **Cadre.** • $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ • $\ell \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$.

Théorème

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors toutes les sous-suites de u tendent vers ℓ.

En pratique : pour prouver qu'une suite n'a pas de limite

Si on peut trouver deux sous-suites de u qui possèdent des limites différentes, alors u n'a pas de limite.

Théorème

Si : $\quad u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad$ et $\quad u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad$ alors : $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

2.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème

Toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

3 Extensions aux suites complexes

Extension des résultats du chapitre dans le cas d'une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.

4 Borne supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

- **Cadre.** • On considère une partie A de $\mathbb{R}$.

4.1 Vocabulaire lié à l'ordre

Partie majorée/minorée/bornée, majorant, minorant, plus grand/petit élément

Théorème : Cas des parties de $\mathbb{N}$ (admis)

i) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément
ii) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément

4.2 Borne supérieure/inférieure

Définition

- La borne supérieure de A est, s'il existe, le plus petit des majorants de A.
- La borne inférieure de A est, s'il existe, le plus grand des minorants de A

- **Remarque.** Si A possède un plus grand élément M, alors A possède une borne supérieure et $M = \sup A$

Théorème : Propriété de la borne supérieure

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Théorème : Caractérisation des intervalles

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :
i) I est un intervalle de $\mathbb{R}$. *ii)* Pour tous $x, y \in I$ tels que $x \leq y$: $\quad [x, y] \subset I$.

4.3 Borne supérieure et suites

Théorème

On suppose A non vide et majorée. Soit M un majorant de A. Sont équivalentes :
i) $M = \sup A$
ii) Il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

Utiliser les suites pour montrer que $M = \sup A$

- On montre que M majore A.
- On construit une suite (a_n) d'éléments de A telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

5 Approximations d'un nombre réel

5.1 Approximation décimale

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

- *L'approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut* est le décimal : $y_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$
- *L'approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès* est le décimal : $z_n = y_n + \dfrac{1}{10^n}$

Théorème

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $y_n \leq x < z_n$
- $z_n - y_n = \dfrac{1}{10^n}$
- $0 \leq z_n - x \leq \dfrac{1}{10^n}$ et $0 \leq x - y_n \leq \dfrac{1}{10^n}$

- **Conséquence.** Les suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x.
- **Remarque.** Les suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes

5.2 Approximation par des rationnels

Théorème

1. Tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.
2. Tout intervalle ouvert non vide possède un rationnel *i.e.* :
   pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$: $\quad \mathbb{Q} \cap]a, b[\neq \varnothing$.

Théorème

Tout nombre réel est limite d'une suite d'irrationnels.

Théorème

Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Il y a équivalence entre :

1. Tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.
2. Tout intervalle ouvert non vide possède un élément de A.

On dit alors que A est *dense* dans $\mathbb{R}$.