Toutes les définitions /énoncés du cours sont à connaître précisément.

Exercices de cours

Une note supérieure à 10 ne saurait être attribuée à un étudiant pris en défaut de connaissance sur un des exercices de cours.

Exercice 1 *Exercice de la feuille 0* — Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

Exercice 2 *Théorème et exemple de cours, chap 0 (II)* —
1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que f' est croissante sur I. Montrer que pour tous $a, x \in I$: $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Interpréter graphiquement cette inégalité.
2. Etablir : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$.

Exercice 3 *Exemple de cours, chap. 0 (III)* —
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $|\sin nx| \leq n|\sin x|$.

Exercice 4 *Exemple de cours, chap. 1 (I)* — Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x) - f(y) = (x-y) f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Exercice 5 *Théorème de cours, chap 1 (II)* — Montrer que si f est convexe sur un intervalle I alors pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$ *(On ne demande pas ici de démontrer l'implication réciproque)*

RAPPELS SUR LES INEGALITES

1 Manipuler des inégalités

1.1 Inégalités et opérations

Théorème : Inégalités et opérations

Soient $a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$.
- *Addition* : si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
- *Multiplication* :
  - *Par un réel positif.* Si $a \leq b$ et $k \geq 0$, alors $ka \leq kb$.
  - *Par un réel négatif.* Si $a \leq b$ et $k \leq 0$, alors $ka \geq kb$
  - *D'inégalités positives.* Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $0 \leq ac \leq bd$.
- *Inverse.* Si $0 < a \leq b$ alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

1.2 Valeur absolue

Définition

- *Définition.* On définit la *valeur absolue* d'un réel x par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
- *Inégalités sur* $|x|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  - $|x| \geq 0$ et $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
  - $-|x| \leq x \leq |x|$.
- *Règles de calcul* Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: • $|-x| = |x|$ • $|xy| = |x|\,|y|$
- *Inégalité triangulaire.* Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Théorème : Interprétation géométrique

Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$:
- $|x| \leq r$ si et seulement si $-r \leq x \leq r$.
- $|x-a|$ est la distance entre x et a : $|x-a| \leq r \quad \text{ssi} \quad x \in [a-r, a+r]$

- **Lien avec la racine carrée.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$,

et pour tout $a \geq 0$: $\boxed{x^2 = a \quad \text{ssi} \quad |x| = \sqrt{a}}$ $\boxed{x^2 \leq a \quad \text{ssi} \quad |x| \leq \sqrt{a}}$

1.3 Partie entière d'un réel x

Définition

- La *partie entière de* x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $n = \lfloor x \rfloor$ ssi : $\begin{cases} n \leq x \\ n+1 > x \end{cases}$

- **Inégalités à retenir.** • $\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$ • $\boxed{x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x}$

2 Fonctions et inégalités

2.1 Fonctions monotones

- **Cadre.** • D est une partie de $\mathbb{R}$ • $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur D

Définition

- f est *croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$: $x \le y \implies f(x) \le f(y)$.
- f est *strictement croissante* sur D si pour tous $x, y \in D$: $x < y \implies f(x) < f(y)$.
- f est *décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$: $x \le y \implies f(x) \ge f(y)$.
- f est *strictement décroissante* sur D si pour tous $x, y \in D$: $x < y \implies f(x) > f(y)$.

Théorème

Si f et g sont croissantes sur D, alors $f + g$ est croissante sur D

2.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

- **Cadre.** $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur D.

Définition

- f est *majorée* si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in D,\ f(x) \le M$
- f est *minorée* si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in D,\ f(x) \ge m$
- f est *bornée* si elle est majorée et minorée,
  c'est équivalent à : $\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in D, \quad |f(x)| \le M$.

Définition

- f possède un maximum en a si : $\forall x \in D, \quad f(x) \le f(a)$

2.3 Etudier une fonction pour établir une inégalité

Etablir une inégalité du type « $\forall x \in D, \quad f(x) \le g(x)$ »

- *Méthode 1*. On peut étudier la fonction $f - g$ sur l'ensemble D.
- *Méthode 2*. Lorsque f est dérivable et convexe *i.e.* lorsque f' est croissante :
  - On peut utiliser l'inégalité des tangentes : $\forall a, x \in I,\ f(x) \ge f(a) + f'(a)(x - a)$
  - On peut utiliser l'inégalité des cordes :

    pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$ et tout $x \in [a, b]$: $f(x) \le f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

3 Raisonnements par récurrence

Retour sur le raisonnement par récurrence, ici mis en œuvre dans le contexte de la démonstration d'inégalités :

- Le principe de récurrence.
- Variantes : récurrence double, récurrence forte.

4 Inégalité des accroissements finis

4.1 Inégalité des accroissements finis

Théorème : (Admis provisoirement)

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
On suppose f' bornée sur I *i.e.* : il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad \left|f'(x)\right| \le k$$

Alors :

$$\forall x, y \in I, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \le k\left|x - y\right|$$

.

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $k \ge 0$. On dit que f est *k-lipschitzienne sur D* si :

$$\forall x, y \in D, \quad \left|f(x) - f(y)\right| \le k\left|x - y\right|$$

4.2 Application à l'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

- **But.** Montrer que la suite (u_n) converge vers un point fixe α de la fonction f.
- **Hypothèse fondamentale.** On trouve $k \in]0, 1[$ tel que : $\forall x \in I, \quad |f'(x)| \le k$.

En pratique : les étapes clés pour montrer que $u_n \to \alpha$

- *Application de l'IAF.*
  Pour tout n, $|f(u_n) - f(\alpha)| \le k|u_n - \alpha|$ c'est à dire : $|u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha|$
- *Par récurrence sur n :*
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \le k^n |u_0 - \alpha|$$
- *Théorème d'encadrement.* Puisque $k \in [0, 1[$: $k^n \to 0$ et donc :
  $$|u_n - \alpha| \to 0 \qquad i.e. \qquad u_n \to \alpha$$

RAPPELS SUR LES FONCTIONS

1 Etude de fonctions : rappels de terminale

1.1 Transformations affines du graphe de f

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, étant donnée une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, nous avons vu l'effet des transformations $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto f(x) + a$,$x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto \lambda f(x)$ et $x \mapsto f(\lambda x)$ sur la courbe représentative de f.

1.2 Parité, imparité périodicité

Définition

On considère une partie D de $\mathbb{R}$ *symétrique* par rapport à 0.
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

- La fonction f est *paire* si :
$$\forall x \in D, \quad f(-x) = f(x)$$
- La fonction f est *impaire* si :
$$\forall x \in D, \quad f(-x) = -f(x)$$

- **Graphiquement.**
  - Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à (Oy).
  - Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O.

En pratique

Inutile d'étudier une fonction paire/impaire sur D tout entier, une étude sur $D \cap \mathbb{R}_+$ suffit.

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et soit T un réel strictement positif.
La fonction f est T-*périodique* si :
$$\forall x \in D, \quad x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

1.3 Rappels sur la dérivation

- **Cadre.**
- I est un intervalle • $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction • a est un point de I

Définition

- La fonction f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite finie quand x tend vers a.
En ce cas on pose $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (nombre dérivé de f en a)
- Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I, et on appelle dérivée de f la fonction f'.

■ **Formulaires à connaître :** les 3 tableaux récapitulatifs des dérivées

Théorème : Composition

On suppose que :
i) v est une fonction dérivable sur J
ii) u est une fonction dérivable sur I et valeurs dans J *i.e.* : $\forall x \in I,\ u(x) \in J$
alors $v \circ u$ est dérivable sur I et : $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

- **Cas particuliers à savoir.** Dérivées de u^α, e^u, $\ln(u)$, $\cos u$, $\sin u$...

Théorème

On suppose f dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si :
$$\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$$
- f est constante sur I si et seulement si :
$$\forall x \in I,\ f'(x) = 0$$

Condition suffisante de stricte monotonie : Si f vérifie :

i) $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0$
ii) f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points
alors f est strictement croissante sur I.

2 Convexité : rappels de terminale

- **Cadre.** • I est un intervalle • $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur I

2.1 Définition et position par rapport aux cordes

Définition

f est convexe si pour tous $a, b \in I$: $\boxed{\forall t \in [0,1],\ f\big(\underbrace{(1-t)a+tb}_{\text{décrit } [a,b] \text{ lorsque } t \text{ décrit } [0,1]}\big) \leq (1-t)f(a)+tf(b)}$

- **Géométriquement.** $\mathscr{C}_f$ est en dessous de toutes ses cordes.
- **Remarque.** f est concave si : $\forall a,b \in I, \forall t \in [0,1],\ f\big((1-t)a+tb\big) \geq (1-t)f(a)+tf(b)$

2.2 Caractérisations de la convexité

Théorème

Il y a équivalence entre :

i) f est convexe sur I

ii) Pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Théorème : Justifier la convexité

- On suppose f dérivable sur I. f est convexe ssi f' est croissante sur I
- On suppose f deux fois dérivable sur I. f est convexe ssi $f'' \geq 0$ sur I

2.3 Inégalités de convexité

- **Inégalité des cordes pour une fonction f convexe sur I.**

Soient $a, b \in I$, distincts. Pour tout x entre a et b : $\boxed{f(x) \leq f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$

Théorème

On suppose f dérivable sur I. Si f est convexe sur I, alors le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes. Pour tous $a, x \in I$: $\boxed{f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)}$

Théorème : Inégalité de Jensen

On suppose f convexe sur I. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Pour tous $a_1, \ldots, a_n \in I$ et tous $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$: $\boxed{f\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i a_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(a_i)}$

- **Cas particulier important.** Avec $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$: $\boxed{f\Big(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} f(a_i)}$

Exemple 1 ♥ *Inégalité arithmético-géométrique.* -♥-

Pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$: $\boxed{\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}}$

L'adresse de la page des maths est : `https://mathieucathala.fr`