Groupe symétrique et déterminants

A - Groupe symétrique

Le groupe symétrique est introduit en vue de l'étude des déterminants, mais aussi pour son intérêt propre et ses interventions possibles dans diverses questions d'algèbre et de probabilités.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. Cycle, transposition. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité.	Notation S_n. Notation $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$. La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.
b) Signature d'une permutation	
Décomposition d'une permutation en produit de transpositions.	
Signature : il existe un unique morphisme de groupes de S_n dans $\{-1,1\}$ envoyant toute transposition sur -1.	La démonstration n'est pas exigible.

B - Déterminants

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*
- *établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;*
- *indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Formes n-linéaires alternées	
Forme n-linéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Antisymétrie, effet d'une permutation.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures. Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\dots,x_n)=0$.
b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	
Si e est une base, il existe une unique forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(e)=1$; toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$.	Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible.
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$. La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)\neq 0$.	
c) Déterminant d'un endomorphisme	
Déterminant d'un endomorphisme.	
Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.
d) Déterminant d'une matrice carrée	
Déterminant d'une matrice carrée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.
Déterminant d'un produit.	Relation $\det(\lambda A)=\lambda^n \det(A)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Caractérisation des matrices inversibles. L'application det induit un morphisme de $\mathrm{GL}(E)$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) sur $\mathbb{K}^*$. Déterminant d'une transposée.	Caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.

e) Calcul des déterminants

Contenus	Capacités & Commentaires
Effet des opérations élémentaires. Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire. Déterminant de Vandermonde.	Lien avec les polynômes de Lagrange.

f) Comatrice

Contenus	Capacités & Commentaires
Comatrice. Relation $A\,\mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top\, A = \det(A)\, I_n$.	Notation $\mathrm{Com}(A)$. Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

Procédés sommatoires discrets

L'étude des séries prolonge celle des suites et permet d'appliquer les techniques d'analyse asymptotique. Les objectifs majeurs en la matière portent sur les séries à termes positifs et la convergence absolue. L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

L'étude des familles sommables est menée dans un deuxième temps. On prolonge les calculs de sommes finies effectués en début d'année, en mettant en évidence un cadre permettant de sommer « en vrac » une famille infinie et procurant ainsi un grand confort de calcul. Dans le cas d'une famille positive, le calcul dans $[0,+\infty]$ *se suffit à lui-même et contient l'étude de la sommabilité. Dans le cas d'une famille quelconque, il est préconisé de commencer par un calcul formel à justifier dans un second temps.*
On se concentre sur la pratique, qui jouera un rôle important en deuxième année.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence et divergence	
Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Reste d'une série convergente.	
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Relation $\mathrm{e}^z=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$ pour $z\in\mathbb{C}$.	
b) Séries à termes positifs ou nuls	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	
Si $0\leqslant u_n\leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n\sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	Application à l'étude de sommes partielles.
Séries de Riemann.	
c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes	
Une série numérique absolument convergente est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n=O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	
d) Théorème des séries alternées	
Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0, $\sum(-1)^n u_n$ converge.	Signe et majoration en valeur absolue de la somme, des restes.
e) Familles sommables de nombres réels positifs	
Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0,+\infty]$. Borne supérieure dans $[0,+\infty]$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Somme d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum_{i\in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I.	La somme est notée $\sum_{i\in I} u_i$. Cas où I est fini, où $I=\mathbb{N}$ (lien avec les séries). On note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge. Invariance de la somme par permutation.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.	On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.
Opérations : somme, multiplication par un réel positif.	
Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j\in J$ et si $(u_i)_{i\in I}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} u_i\Big) = \sum_{i\in I} u_i$.	La démonstration est hors programme.
Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif.	

f) Familles sommables de nombres complexes

La famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}^I$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} \lvert u_i\rvert < +\infty$.	Notation $\ell^1(I)$. Pour $I=\mathbb{N}$, lien avec les séries. Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable.
Somme d'une famille sommable de nombres complexes.	Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et si $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$, il existe une partie finie F de I telle que $\Big\lvert \sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i \Big\rvert \leqslant \varepsilon$. Invariance de la somme par permutation.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes et soit (v_i) une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i\in I$, $\lvert u_i\rvert \leqslant v_i$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.	
Linéarité de la somme.	
Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j\in J$, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j} u_i\Big) = \sum_{i\in I} u_i$.	La démonstration est hors programme.
Cas où I est un produit : théorème de Fubini.	
Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_{i'})_{i'\in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i,i')\in I\times I'}$ est sommable et $$\sum_{(i,i')\in I\times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{i'\in I'} b_{i'}.$$	Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	On retrouve le fait que l'exponentielle complexe est un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Fonctions de deux variables

Le but de cette section, dont le contenu sera entièrement repris dans un cadre plus général en seconde année, est de familiariser les étudiants avec les calculs sur les dérivées partielles, notamment avec la « règle de la chaîne », et de développer une vision géométrique des fonctions de deux variables. Le point de vue est donc essentiellement pratique. Toute extension et tout développement théorique supplémentaire sont hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues	
Boules de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique. Ouverts.	
Continuité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Représentation graphique d'une fonction de deux variables par une surface. La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme.
b) Dérivées partielles	
Dérivées partielles en un point d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.	Définition par la continuité des dérivées partielles. La notion de fonction différentiable est hors programme.
Développement limité à l'ordre 1 au point (x_0, y_0) d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$: $$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\\|(h,k)\\|).$$	Démonstration hors programme. On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ et l'interprétation de $$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0)$$ comme équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface d'équation $z = f(x, y)$.
Gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Expression du développement limité à l'aide du gradient.	Notation $\nabla f(x_0, y_0)$. Le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.
c) Dérivées partielles et composées	
Dérivée selon un vecteur.	Expression à l'aide du gradient $\langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle$.
Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(x(t), y(t))\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$	Interprétation comme dérivée de f le long d'un arc γ donné par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et expression à l'aide du gradient $$(f\circ\gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$ où $\gamma'(t)$ est défini par $(x'(t), y'(t))$. Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.
Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.	
d) Extremums	
Maximum et minimum, local ou global d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$.	
Point critique. Tout extremum local d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un point critique.	Exemples d'étude de points critiques.