Suites récurrentes linéaires

1 SF 2 Une suite réelle u vérifie $u_{10} = -10240$, $u_{20} = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n)$. Calculer u_0 et u_1.

2 SF 2 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = (a+b)u_{n+1} - abu_n$
Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

3 SF 2 Déterminer, suivant la valeur de $a \in \mathbb{C}$ l'expression des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$$

4 SF 2 SF 7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite complexe définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1+4i$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (3-2i)u_{n+1} - (5-5i)u_n$
Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

5 SF 2 Une suite réelle u vérifie :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0 \quad \text{et} \quad u_{n+2} \leq \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$$
Montrer que u converge vers 0. *Indication : Considérer la suite (v_n) vérifiant $v_0 = u_0$, $v_1 = u_1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n$.*

6 SF 1 SF 2 Dans chacun des cas suivant, calculer en fonction de n le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n^2$. *Indication : A partir de u, construire une suite auxiliaire arithmético-géométrique*
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1}^6 u_n^{-5}$.

7 SF 1 On considère deux suites réelles u et v telles que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$:
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - v_n) + 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (z_n), de terme général $z_n = u_n + iv_n$, est arithmético-géométrique.
2. En déduire que u et v convergent et trouver leurs limites

8 SF 2 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :
$$\forall x > 0, \quad f\big(f(x)\big) = 6x - f(x)$$

9 SF 2 SF 6 Soit (x_n) une suite réelle.
On suppose que $x_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = |x_n - n|$

1. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \leq n_0$.
2. Montrer que pour tout $n \geq n_0$: $x_{n+1} + x_n = n$.
3. Montrer que la suite $\left(x_n - \frac{n}{2}\right)$ est bornée.

Opérations sur les limites

10 SF 5 SF 7 Dans chacun des cas, étudier la convergence de la suite (u_n) et calculer sa limite lorsqu'elle existe.

a) $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$ b) $u_n = \sqrt{e^n + \cos n} - \sqrt{2^n - 1}$

c) $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$ d) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

e) $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ f) $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ $(a, b \in \mathbb{R}^{+*})$

g) $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}$ h) $u_n = (3 - \sin^2 n)^{\frac{1}{n}}$

i) $u_n = e^{-\sqrt{n}} \ln(1 + n + e^n)$ j) $u_n = \sin\left(\dfrac{n^2 + 2n + 3}{n+1}\pi\right)$

11 SF 7 Soit u une suite réelle. Montrer que

a) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ssi $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

b) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ssi u est bornée et $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

12 SF 7 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = a^{2n}u_n + a^{n^2}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = a^{-n^2+n}u_n$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = a^{-n}$.
   b) Calculer v_n en fonction de a et n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Etudier la limite de u en fonction du paramètre a.

13 SF 7 Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes de module 1.
Pour tout $n \geq 1$, on pose : $m_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k$.
On suppose la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente de limite ℓ.
On suppose enfin que pour tout $k \geq 1$: $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} z_{k+i}\overline{z_i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{i=0}^{N-1}(z_{k+i} - \ell)\right|^2$
2. En déduire que $\ell = 0$.

Limites par encadrement

14 SF 7 Soient u et v deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 1$ et $0 \leq v_n \leq 1$. On suppose que : $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
Montrer que u et v convergent vers 1.

15 SF 7 Soit u une suite convergente à termes tous distincts. On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{R}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq N$: $|u_{n+1} - u_n| \geq q\,|u_n - u_{n-1}|$. Montrer que $q \in]0,1[$.

16 SF 3 SF 7 Dans chacun des cas, étudier la convergence de la suite (u_n) et calculer sa limite lorsqu'elle existe.

a) $u_n = \dfrac{a}{n}\left\lfloor\dfrac{n}{b}\right\rfloor$ $(a, b \in \mathbb{R}_+^*)$ b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$

c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$ d) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\lfloor k\pi\rfloor}{n^2}$

e) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ f) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

17 SF 3 SF 7 Dans chacun des cas, étudier la convergence de la suite (u_n) et calculer sa limite lorsqu'elle existe.

a) $u_n = \dfrac{n}{a}\left\lfloor\dfrac{b}{n}\right\rfloor$ $(a, b \in \mathbb{R}_+^*)$ b) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ c) $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k!$

d) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}$. e) $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1}\left(2 - \frac{k}{2n}\right)$

18 SF 3 SF 7 Pour tout $n \geq 2$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left\lfloor\frac{\ln n}{\ln k}\right\rfloor$.

1. Montrer que : $S_n = \displaystyle\sum_{j=2}^{n}\left\lfloor n^{\frac{1}{j}}\right\rfloor$, pour tout $n \geq 2$.
2. En déduire que $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Limites des suites monotones

19 SF 3 SF 4 SF 6 Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

a) Montrer que : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout entier $k \geq 2$.

b) En déduire que (u_n) est convergente.

20 SF 3 SF 4 SF 6 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + a^k)$.

a) Montrer que si $a \geq 1$, alors $u_n \to +\infty$

b) Montrer que si $a < 1$, alors (u_n) converge.

21 SF 4 SF 6 On considère une suite u telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}}$.

1. Montrer que (u_n) converge puis déterminer sa limite.
2. En calculant la somme $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} \right)$ de deux façon différentes pour $n \geq 1$, montrer que $\sqrt{n}\, u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

22 SF 4 SF 6 Soit u une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n \leq 1 \quad \text{et} \quad (1 - u_n) u_{n+1} > \frac{1}{4}$$

a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

b) En déduire que u converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.

c) Montrer que $\ell = \frac{1}{2}$.

23 SF 4 SF 6 Soient $a \in]0,1[$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $0 < u_0 < u_1$ et pour tout $n \geq 1$: $u_{n+1} = u_n + a^n u_{n-1}$.
Montrer que u est convergente.

24 SF 4 SF 6 SF 7 On pose $u_1 = 1$ puis : $u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$, pour tout $n \geq 1$.

a) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

b) Etudier la limite de $\left(u_n - \sqrt{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

25 SF 6 SF 7 Soit $a \in]0,1[$ et (u_n) une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} \geq a u_n + (1-a) u_{n-1}$. Pour $n \geq 1$, on pose : $v_n = \min(u_n, u_{n-1})$ et $w_n = \frac{v_{n+1} - (1-a) v_n}{a}$.

1. Montrer que (v_n) possède une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
2. On suppose que $\ell = +\infty$. Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. On suppose que ℓ est finie.
   a) Montrer que pour tout $n \geq 1$: $u_n \leq \max(\ell, w_n)$.
   b) En déduire que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

26 SF 4 SF 6 Soients $a > b > 0$. On pose : $u_0 = a$, $v_0 = b$ puis pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$

1. Montrer que u et v convergent.
2. Déterminer les limites de u et v en fonction de a et b.

Suites adjacentes

27 SF 4 SF 5 SF 8 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

28 SF 4 SF 8 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

29 SF 4 SF 8 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $0 < a < b$.
On pose : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{u_n v_n}}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n + \sqrt{u_n v_n}}{2}$$

1. Montrer que u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $c_n = \frac{v_n - u_n}{\ln v_n - \ln u_n}$ est bien défini et que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
3. **a)** Montrer que pour tous réels x, y tels que $0 < x < y$:
$$\frac{1}{y} \leq \frac{\ln y - \ln x}{y - x} \leq \frac{1}{x}$$
   b) En déduire la valeur de ℓ en fonction de a et b.

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

30 SF 11 Etudier, en fonction de la valeur de u_0, la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

a) $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$ **b)** $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$

31 SF 11 Etudier, en fonction de la valeur de u_0, la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

a) $u_{n+1} = u_n - \ln u_n$ **b)** $u_{n+1} = 3u_n^2$.

32 SF 11 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$ sur $]-\infty, 1]$.

1. Déterminer les valeurs de u_0 pour lesquelles on peut définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation : $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Sur $[0,1]$, étudier le signe de $h : x \mapsto f \circ f(x) - x$.
3. Soit $u_0 \in]0,1[$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite. *Indication : Etudier la convergence de (u_{2n}) et (u_{2n+1})*
4. Etudier la convergence de (u_n) lorsque $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$.

33 SF 6 SF 11 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \cdots + \sqrt{a_n}}}$

($n+1$ symboles $\sqrt{\ }$ superposés).

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $\left(a_n^{\frac{1}{2^n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.