1 Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. La résolution de l'équation caractéristique permet d'exprimer u_n en fonction de deux constantes $A, B \in \mathbb{R}$.
On détermine A et B à l'aide des valeurs de u_{10} et u_{20}.
On peut alors calculer u_0 et u_1.
Réponses : $u_0 = -20$ *et* $u_1 = -38$.

2 Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique a pour racines a et b, il y a donc deux racines réelles mais elles peuvent être confondues donc il faut distinguer deux cas

- *Si* $a \neq b$ L'équation caractéristique a deux racines distinctes, on obtient $u_n = \dfrac{b^n - a^n}{b-a}$.
- *Si* $a = b$ L'équation caractéristique a une racine double, on obtient $u_n = na^{n-1}$.

3 Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et on est dans le cas complexe ici (car $a \in \mathbb{C}$). On peut écrire le discriminant Δ de l'équation caractéristique comme un carré : $\Delta = 4(a+2i)^2$ il faut distinguer deux cas selon que $\Delta = 0$ ou $\Delta \neq 0$.

- *Si* $a \neq -2i$ L'équation caractéristique a deux racines distinctes, on obtient $u_n = A \times 2^n (a+i)^n + B \times (-2i)^n$.
- *Si* $a = -2i$ L'équation caractéristique a une racine double, on obtient $u_n = (A + nB)(-2i)^n$.

4 Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et on est dans le cas complexe ici.
Réponses pour vérifier vos calculs :

- *Le discriminant* Δ *de l'équation caractéristique vaut* $\Delta = -15 + 8i$.
- *Une racine carrée de* Δ *est* $\delta = 1 + 4i$.
- *Les solutions de l'équation caractéristiques sont* $\lambda_1 = 1 - 3i$ *et* $\lambda_2 = 2 + i$.
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = -(1-3i)^n + (2+i)^n$.

5 Considérer la suite (v_n) vérifiant $v_0 = u_0$, $v_1 = u_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n$.

- Montrer d'abord par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que : $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- On a donc : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n$.
  En vertu du th. d'encadrement, il suffit de montrer que $v_n \to 0$.
  Pour cela calculer v_n en fonction de n en vérifiant que les deux suites géométriques dont v est combinaison linéaire tendent vers 0.

6
1. La suite v de terme général $v_n = \ln u_n$ vérifie, $v_{n+1} = \ln 2 + 2v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   v est donc une suite arithmético-géométrique.
   On peut ainsi exprimer v_n en fonction de n puis revenir à $u_n = e^{v_n}$.
   Réponse : $u_n = 2^{2^n - 1}$.
2. La suite v de terme général $v_n = \ln u_n$ vérifie, $v_{n+2} = 6v_{n+1} - 5v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   v est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   On peut ainsi exprimer v_n en fonction de n puis revenir à $u_n = e^{v_n}$.
   Réponse : $u_n = 2^{\frac{5^n - 1}{4}}$.

7
1. $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n + 2 - i$.
2. (z_n) est arithmético-géométrique, on trouve, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad z_n = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n (z_0 - \alpha) + \alpha$ où $\alpha = 3 + i$.
   Puisque $\left|\dfrac{1+i}{2}\right| < 1$, $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\alpha) = 3$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\alpha) = 1$

8 Procéder par analyse-synthèse.
Pour l'analyse, si f convient pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, considérer la suite u définie par $u_0 = x$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = f(u_n)$.
L'hypothèse faite sur f permet d'exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n puis (suite récurrente linéaire d'ordre 2) d'obtenir $u_n = A \times 2^n + B \times (-3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La positivité de u exige $B = 0$ et donc $u_n = A \times 2^n$.
On obtient $A = x$ avec u_0 et $f(x) = u_1 = 2x$.
Ne pas oublier la synthèse.

9
1. Raisonner par l'absurde. Si $x_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, dégager une contradiction en utilisant la définition de la suite pour montrer que (x_n) est décroissante.
2. Procéder par récurrence.
3. Remarquer que la suite $(u_n) = (x_n - \frac{n}{2})$ est arithmético-géométrique, on obtient $u_{n+1} = -u_n - \dfrac{1}{2}$.

10
a) Utiliser la quantité conjuguée puis factoriser le dénominateur par $\sqrt{n^2} = n$.
Réponse : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

b) Factoriser par $\sqrt{e^n}$ (le terme prépondérant)
Réponse : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

c) Factoriser par n au numérateur et au dénominateur.
Réponse : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{5}$.

d) Revenir à la forme exponentielle et utiliser la limite classique $\lim\limits_{t\to0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$.
Réponse : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.

e) Ecrire $\ln(1 - \frac{1}{k^2}) = \ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln k$ puis séparer les sommes, réindexer et simplifier, on obtient $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln 2$ puis $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln 2$.

f) Distinguer les cas $a < b$, $a = b$ et $a > b$ puis factoriser par le terme prépondérant dans chaque cas.
Réponse $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } a > b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -1 & \text{si } a < b \end{cases}$

g) Il s'agit d'une somme géométrique, que l'on sait donc calculer explicitement.
Réponse : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

h) Revenir à l'exponentielle, on voit apparaître un produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle.
Réponse : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

i) Factoriser par e^n (terme prépondérant) dans le logarithme.
Réponse : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

j) Ecrire $n^2 + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2$ au dénominateur et utiliser

ensuite le fait que $\sin((n+1)\pi + x) = (-1)^{n+1} \sin x$.
Réponse : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

11 **1.** • Si $u_n \to 0$, alors $\dfrac{u_n}{1+u_n} \to \dfrac{0}{1+0}$ (opérations sur les limites).
• Si $v_n \to 0$, exprimer u_n en fonction de v_n et conclure de même que dans le cas précédent.

2. • Si $u_n \to 0$, alors u est bornée (cours) et $\dfrac{u_n}{1+u_n^2} \to \dfrac{0}{1+0^2}$ (opérations sur les limites).
• Si $v_n \to 0$ et si u est bornée, écrire $u_n = v_n \times (1+u_n^2)$ c'est à dire un produit d'une suite ... par une suite ...

12 **1. a)**

b) Utiliser : $\quad v_n = v_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k$.

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k$ est géométrique avec **1a)**.

Réponse : $v_n = \begin{cases} n+1 & \text{si } a = 1 \\ 1 + \dfrac{1-a^{-n}}{1-a^{-1}} & \text{si } a \neq 1 \end{cases}$.

2. Utiliser l'expression de **1b)** et le fait que $u_n = a^{n^2-n} v_n$.
Réponse :
- Si $a = 1$: $\quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si $0 < a < 1$: $\quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $a > 1$: $\quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

13 **1.** *Réponse :* $\quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} N - N^2 |\ell|^2$.
2. La suite (u_n) est positive donc sa limite l'est aussi.

14 Les hypothèses permettent de montrer que $u_n v_n \leq u_n \leq 1$ et $u_n v_n \leq v_n \leq 1$.
On conclut par encadrement

15 Itérer la relation $|u_{n+1} - u_n| \geq q\,|u_n - u_{n-1}|$:
$$\begin{aligned}|u_{n+1} - u_n| &\geq q\,|u_n - u_{n-1}| \\ &\geq q^2 |u_{n-1} - u_{n-2}| \geq \cdots \geq q^{n-N} |u_{N+1} - u_N|\end{aligned}$$
(prouver : $\quad |u_{n+1} - u_n| \geq q^{n-N} |u_{N+1} - u_N| \quad$ par récurrence sur $n \geq N$ pour plus de rigueur). L'hypothèse faite sur u assure alors par encadrement que $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

16 On utilise dans tous les cas le théorèmes de comparaison (*i.e.* encadrement pour une limite finie, ou minoration-majoration pour une limite infinie).

a) Encadrer u_n à l'aide de l'encadrement $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$.
Réponse $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{a}{b}$.

b) Utiliser le savoir faire SF 3 *i.e.* encadrer l'intérieur, ici, la minoration $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $k \in [\![1\,,n]\!]$ permet de minorer u_n par $\sqrt{n}$.
Réponse $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

c) Utiliser le savoir faire SF 3 *i.e.* encadrer l'intérieur, ici, l'encadrement $\frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{1}{n}$ pour $k \in [\![1\,,n]\!]$ permet d'encadrer u_n par deux suites de limite 1.
Réponse $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

d) Utiliser le savoir faire SF 3 *i.e.* encadrer l'intérieur, ici, l'encadrement $k\pi - 1 \leq \lfloor k\pi \rfloor \leq k\pi$ pour $k \in [\![1\,,n]\!]$ permet d'encadrer u_n par deux sommes que l'on sait calculer puis d'appliquer le théorème d'encadrement..
Réponse $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

e) Utiliser le savoir faire SF 3 *i.e.* encadrer l'intérieur. Attention ici on part de $k \in [\![1\,,2n+1]\!]$ donc $1 \leq k \leq 2n+1$. On obtient $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{n}$ pour $k \in [\![1\,,2n+1]\!]$ et on somme pour $k \in [\![1\,,2n+1]\!]$ ce qui permet d'encadrer u_n par deux suites de limite 2.
Réponse $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

f) La même méthode qu'au cas précédent permet de minorer u_n par une suite de limite infinie.*Réponse* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

17 **a)** $u_n = 0$ dès que $n > b$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) En « sortant » le facteur 1 : $n! \leq 1 \times n^{n-1}$ ce qui permet de montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c) Sortir les termes d'indices $k = n$ et $k = n-1$ de la somme :
$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!}$$
puis majorer, pour $k \in [\![1\,,n-2]\!]$, $k!$ par $(n-2)!$ ce qui permet de montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

d) Sortir les deux termes extrêmes au début et à la fin :
$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}}_{S_n} + \frac{1}{n} + 1$$
Montrer ensuite que pour $2 \leq k \leq n-2$, $\binom{n}{k} \geq \frac{n(n-1)}{2}$ ce qui permet de montrer que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

e) L'idée est de minorer les termes du produit par une constante strictement supérieure à 1 afin de minorer u_n par une suite géométrique divergeant vers $+\infty$:
Pour $n \in \mathbb{N}^*$:
- Si $1 \leq k \leq n$: $\quad 2 - \dfrac{k}{2n} \geq \dfrac{3}{2}$ donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(2 - \frac{k}{2n}\right) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$.
- Ensuite couper le produit en deux et minorer de même $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} \left(2 - \frac{k}{2n}\right)$ par 1.

Par minoration, on montre que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

18 **1.** Sommer « par paquets » en regroupant les termes en fonction de la valeur de $\left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln k} \right\rfloor$.

2. En posant $N = \dfrac{\ln n}{\ln 2}$, remarquer que $\left\lfloor n^{\frac{1}{j}} \right\rfloor = 1$ si $j > N$.
Couper la somme S_n en l'indice N et majorer les termes d'indices supérieurs à $N+1$ par $\sqrt{n}$.

19 **a)** Noter que pour $k \geq 2$:
$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k^2-k}$.

b) Utiliser le théorème de la limite monotone.
Il n'est pas difficile de montrer que u est croissante ($u_{n+1} - u_n$ est simple).

Ensuite utiliser la question a) pour majorer :
Sommer les inégalités $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour $k \in [\![2, n]\!]$
Ajouter ensuite le terme d'indice $k = 1$ à savoir 1.

On obtient après télescopage : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$

20 **1.** Procéder par minoration en utilisant $1 + a^k \geq 2$.

2. Utiliser le théorème de la limite monotone. Il n'est pas difficile de montrer que u est croissante.
Ensuite majorer u_n à l'aide de l'inégalité $1 + a^k \leq e^{a^k}$
Cela permet de majorer u_n par un produit d'exponentielles donc par l'exponentielle d'une somme qui est une somme géométrique de raison a, donc on peut calculer la somme.
En calculant la somme on obtient $u_n \leq e^{\frac{1}{1-a}}$ pour tout $n \geq 1$.

21 **1.** En deux temps :

- *Convergence :* avec le théorème de la limite monotone. On constate (récurrence) que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis on montre facilement que u décroît.
- *Valeur de* $\ell = \lim u_n$
  L'égalité : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}}$
  assure que ℓ vérifie : $\quad \ell = \dfrac{\ell}{\sqrt{1 + \ell^2}}$.
  On trouve ainsi $\ell = 0$.

2. • *Première façon :* Par télescopage : $S_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_0^2}\right)$.

- *Deuxième façon :* Par définition : $u_k = \dfrac{u_{k-1}^2}{\sqrt{1 + u_{k-1}^2}}$ ce qui donne $\dfrac{1}{u_k^2} - \dfrac{1}{u_{k-1}^2} = 1$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = 1$.

En égalant les deux expressions de S_n : $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{u_n^2} - \dfrac{1}{u_0^2}\right) = 1$
ce qui donne une expression de $\sqrt{n}u_n$ en fonction de n (et de u_0) où l'on constate que $\sqrt{n}u_n \to 1$.

22 **a)** Etudier la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ sur $[0, 1]$ pour trouver son maximum.

b) Utiliser le théorème de la limite monotone.
La monotonie suffit vu que u est bornée par hypothèse.
Pour trouver le signe de $u_{n+1} - u_n$ combiner l'hypothèse avec le résultat de la question a) appliqué avec $x = u_n$: $(1 - u_n)u_{n+1} > (1 - u_n)u_n$.

c) Le théorème de passage aux limites dans $(1 - u_n)u_{n+1} > \dfrac{1}{4}$ combiné avec le résultat de la question a) appliqué avec $x = \ell$ assure que $(1 - \ell)\ell = \dfrac{1}{4}$ *i.e.* $f(\ell) = \dfrac{1}{4}$.
Utiliser alors le tableau de f de la question a)

23 Utiliser le théorème de la limite monotone :

- Montrer que u est croissante.
- Pour majorer u :
  - montrer d'abord que $u_{n+1} \leq (1 + a^n)u_n$ pour tout $n \geq 1$.
  - en déduire que $u_n \leq \left(\prod_{k=1}^{n-1} 1 + a^k\right)u_1$ pour tout $n \geq 2$.
  - à l'aide de : $\quad 1 + a^k \leq e^{a^k}$ montrer : $\qquad u_n \leq e^{\frac{a}{1-a}} u_1$.

24 **a)** Montrer que pour tout $n \geq 1$:
$$\frac{1 + \sqrt{4(n-1)}}{2} \leq u_n \leq \frac{1 + \sqrt{4n+1}}{2}$$

b) Utiliser l'encadrement de la question précédente.
Réponse : $u_n - \sqrt{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

25 **1.** Montrer que (v_n) est croissante. Pour montrer que $v_{n+1} = \min(u_n, u_{n+1}) \geq v_n$ il s'agit de montrer que $u_n \geq v_n$ et $\quad u_{n+1} \geq v_n$.

2. Procéder par minoration en utilisant $u_n \geq v_n$.

3. a) Distinguer deux cas :

- Ou bien $u_n \leq \ell$. Dans ce cas : $u_n \leq \max(\ell, w_n)$.
- Ou bien $u_n > \ell$. Dans ce cas, vu que (v_n) est croissante de limite ℓ, $u_n > v_n$ donc $v_n = u_{n-1}$ et pour la même raison $v_{n+1} = u_{n+1}$. L'hypothèse sur la suite u s'écrit ainsi : $\quad v_{n+1} \geq a u_n + (1 - a)v_n$. $\quad$ Cette inégalité se réécrit $u_n \leq w_n$ donc $u_n \leq \max(\ell, w_n)$.

b) Commencer par montrer que $w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ (par opérations en utilisant $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$). Ensuite revenir à la définition de la limite (« avec les ε ») pour montrer que $\max(\ell, w_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Le résultat en découle par encadrement sachant que $v_n \leq u_n \leq \max(\ell, w_n)$ pour tout $n \geq 1$.

26 **1.** Commencer par montrer (par récurrence) que les deux suites sont strictement positives puis utiliser le théorème de la limite monotone.

2. Notant ℓ_1 la limite de (u_n) et ℓ_2 celle de (v_n) :

- L'égalité $u_{n+1} \times (u_n + v_n) = u_n^2$ donne $\ell_1(\ell_1 + \ell_2) = \ell_1^2$ donc $\ell_1 \ell_2 = 0$.
- Montrer par ailleurs que la suite $(u_n - v_n)$ est constante ce qui donne $\ell_1 - \ell_2 = a - b$.

Il y a deux alternatives :
$(\ell_1 = 0 \quad \text{et} \quad \ell_2 = b - a) \qquad \text{ou} \qquad (\ell_2 = 0 \quad \text{et} \quad \ell_1 = a - b)$
Eliminer la première alternative en observant le signe de $b - a$.

27 Il suffit de vérifier les trois conditions du théorème sur les suites adjacentes (ici u est croissante, v est décroissante, $v_n - u_n \to 0$).

28 Il suffit de vérifier les trois conditions du théorème sur les suites adjacentes (ici u est décroissante, v est croissante, $v_n - u_n \to 0$), utiliser la quantité conjugué pour des calculs efficaces.

29 **1.** Montrer que u et v sont adjacentes.
Pour cela commencer par montrer que la suite $(d_n) = (v_n - u_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
Ceci assure que $v_n - u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $v_n > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce dernier point permet de déterminer les signes de $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$.

2. La bonne définition de c_n repose sur le fait que $u_n, v_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_n \neq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier ensuite que $c_{n+1} = c_n$ en remplaçant v_{n+1} et u_{n+1} par leurs expressions en fonction de v_n et u_n.

3. a) Appliquer l'inégalité des tangentes à la fonction concave ln aux points x et y.

b) En appliquant l'inégalité de **3a)** avec u_n et v_n, montrer par encadrement que $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Conclure en utilisant le fait que (c_n) est constante.
Réponse : $\ell = \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a}$.

30 Dans chacun des cas, on étudie une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est croissante sur son intervalle I de définition, et où I est stable par f. On applique donc la méthode du savoir-faire **SF 11** :

- On étudie le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$
- On distingue des cas selon la position de u_0 par rapport aux zéros de g en montrant, dans chaque cas, que :
  1. Les termes de la suite (u_n) « restent » dans un intervalle où g est de signe constant
  2. (u_n) est monotone (croissante ou décroissante selon le signe de g).
  3. (u_n) a une limite (avec le théorème de la limite monotone)

31 **a)** Distinguer deux cas :

- Si $u_0 \geq 1$ alors :
  - $[1,+\infty[$ est stable par f
  - f est croissante sur $[1,+\infty[$

  Donc ce cas se traite par la méthode standard.
- Si $0 < u_0 < 1$, alors montrer que $u_1 \geq 1$ ce qui permet de se ramener au premier cas.

b) Distinguer deux cas :

- Si $u_0 \geq 0$ alors :
  - $[0,+\infty[$ est stable par f
  - f est croissante sur $[0,+\infty[$

  Donc ce cas se traite par la méthode standard (f possède deux points fixes sur $\mathbb{R}_+$: 0 et $\frac{1}{3}$).
- Si $u_0 < 0$, alors montrer que $u_1 \geq 0$ ce qui permet de se ramener au premier cas. Plus précisément, distinguer des cas sur u_0 en fonction de la position de $u_1 = f(u_0)$ par rapport à $\frac{1}{3}$ (il convient de distinguer les cas : $u_0 < \frac{-1}{3}$, $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_0 > \frac{1}{3}$).

32 **1.** *Réponse :* La suite est bien définie ssi $u_0 \in [0,1]$.

2. En posant $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, on trouve que h est :

- Positive sur $[0,\alpha]$
- Négative sur $[\alpha,1]$

3. Vu que $f \circ f$ est croissante, le signe de h permet de montrer la convergence de (u_{2n}) vers α selon la méthode standard (en distinguant des cas selon que $u_0 < \alpha$, $u_0 = \alpha$ ou $u_0 > \alpha$).
On montre ensuite que (u_{2n+1}) est monotone de sens contraire à (u_{2n}) (grâce à la décroissance de f) et qu'elle converge elle aussi vers α.

4. Observer les valeurs de u_{2n} et u_{2n+1}.

33 Commencer par étudier le cas où (a_n) est constante.