Définition de la convergence

1 SF 4 SF 6 Soit u une suite strictement positive. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel k.

1. On suppose que $k<1$. Montrer que u converge vers 0.
2. On suppose que $k>1$. Montrer que u tend vers $+\infty$.

2 SF 4 SF 6 Soit u une suite bornée telle que $2u_n \leq u_{n-1}+u_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_{n+1}-u_n$.

a) Montrer que : $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) En déduire que u est convergente.

3 SF 7 Soit u une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que u est constante à partir d'un certain rang.

4 SF 7 Soit (x_n) une suite réelle telle que : $x_{n-1}+2x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5 SF 7 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

a) Montrer que si : $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ alors : $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

b) Montrer que si : $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors : $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

6 SF 7 Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles convergentes de limites a et b. Montrer : $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ab$.

7 SF 7 Soit u une suite positive. On suppose qu'il existe $q \in [0,1[$ et une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive de limite nulle tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leq q u_n + r_n$. Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

8 SF 11 Soit $u_0 \in \mathbb{R}_+$.

1. Soit $a>0$. Montrer la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{a+u_n}$ converge vers $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.
2. Soit (a_n) une suite strictement positive de limite $a>0$. On définit (u_n) en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \sqrt{a_n+u_n}$$
 a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{p} < a$. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$:
$$\frac{1+\sqrt{1+4(a-\frac{1}{p})}}{2} - \frac{1}{p} \leq u_n \leq \frac{1+\sqrt{1+4(a+\frac{1}{p})}}{2} + \frac{1}{p}$$
 Indication : Considérer les suites $(v_n)_{n\geq N}$ et $(w_n)_{n\geq N}$ définies par $v_{n+1} = \sqrt{a-\frac{1}{p}+v_n}$ et $w_{n+1} = \sqrt{a+\frac{1}{p}+w_n}$ à partir d'un certain rang N.

 b) Montrer que (u_n) converge vers $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

9 SF 7 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 1$, on pose : $u_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\lfloor nx \rfloor} a_k$.

Montrer qu'il y a équivalence entre :

i) La suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

ii) Pour tout $x>1$, la suite $\left(u_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Suites extraites

10 SF 9 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{5n^2+\sin n}{3n^2\cos\frac{n\pi}{5}}$ n'a pas de limite.

11 SF 9 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = n^{(-1)^n}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
2. Montrer que toute sous-suite convergente de u converge nécessairement vers 0. *Indication : Procéder par l'absurde.*

12 Soit $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$.Le but de cet exercice est de prouver la divergence de la suite $u = (\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $u_{n+1}+u_{n-1}$ en fonction de u_n
2. On suppose que u converge vers un réel ℓ.
 a) Montrer que $\ell = 0$
 b) Aboutir à une contradiction en considérant u_{2n}

13 SF 6 SF 10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Dans chacun des cas suivants, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b) $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes

14 SF 7 SF 10 Soit u une suite telle que pour tous $n,p \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$. Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

15 SF 6 Soit u une suite croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{2n}-u_n \leq \frac{1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2^n}$.

a) Montrer que la suite v est majorée.

b) En déduire que u est convergente.

16 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \cos(\ln n)$. Montrer que tout réel $x \in [-1,1]$ est limite d'une suite extraite de u.

Suites implicites

17 SF 12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad f_n(x) = x^n \ln x - 1$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n \ln x = 1$ possède exactement une solution dans $[1,+\infty[$, notée x_n.
2. Montrer que (x_n) est décroissante.
 Indication : Montrer que pour tout $n \geq 1$, $f_{n+1}(x_n) \geq 0$.
3. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

18 SF 12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $[0,1]$ par :
$$\forall x \in [0,1],\quad f_n(x) = x^n - \cos x$$

1. Montrer que l'équation $x^n = \cos x$ possède exactement une solution dans $[0,1]$, notée x_n.
2. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

Borne supérieure

19 SF 13 Soit A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que :
$\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq b$ et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists (a,b) \in A \times B \mid b - a \leq \varepsilon$
Montrer que A possède une borne supérieure, que B possède une borne inférieure et que $\sup A = \inf B$.

20 SF 13 Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.
On pose : $D = \{|x-y|\,;\,(x,y) \in A^2\}$.
Montrer que : $\sup D = \sup A - \inf A$

21 SF 13 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on appelle *distance de x à A* le réel : $d(x,A) = \inf\{|x-a|\ ;\ a \in A\}$.

1. Justifier la bonne définition de $d(x,A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Que vaut $d(x,A)$ pour tout $x \in A$?
3. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\left|d(x,A) - d(y,A)\right| \leq |x-y|$$
4. On pose $A = \mathbb{Q} \cap [0,1[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = d(x,A)$
Déterminer une expression simple de $f(x)$ en fonction de x pour tout $x \in \mathbb{R}$.

22 SF 13 Déterminer, lorsqu'elles existent, les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants.

a) $A = \left\{1 + \dfrac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ **b)** $B = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

c) $C = \left\{\dfrac{(-1)^n n}{n+1}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ **d)** $D = \left\{\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\ ;\ p,q \in \mathbb{N}^*\right\}$

e) $E = \left\{\dfrac{pq}{p^2+q^2}\ ;\ p,q \in \mathbb{N}^*\right\}$

23 SF 13 Soit x un réel positif ou nul. La *partie entière de x* a été définie dans le cours comme le plus grand élément de l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$. L'objectif de cet exercice est de justifier l'existence d'un plus grand élément pour A.

1. Montrer que A possède une borne supérieure s.
2. Montrer qu'il existe un élément $m \in A$ tel que $s < m+1$.
3. En déduire que A possède un plus grand élément.

Approximations d'un réel

24 SF 13 SF 14 **a)** Etudier la fonction $x \mapsto x + \dfrac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

b) En déduire la borne inférieure de $A = \left\{\dfrac{p}{q} + 2\dfrac{q}{p}\ ;\ p,q \in \mathbb{N}^*\right\}$

25 SF 14 On pose $E = \left\{\dfrac{p}{2^n}\ ;\ p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$.
Montrer que E est dense dans $\mathbb{R}$.

26 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x,y \in \mathbb{R},\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

1. Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\quad f(nx) = nf(x)$.
Montrer que cette relation est encore vraie pour $n \in \mathbb{Z}^-$.
3. On pose $a = f(1)$. Etablir que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$.
4. On suppose f croissante. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$
Indication : Considérer les approximations décimales (y_n) et (z_n)

Autour de Bolzano-Weierstrass

27 Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{2^n}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = \max\{|u_n|, |u_{n+1}|\}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M_{n+1} \leq \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)M_n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M_n \leq e^2 M_0$.
En déduire alors que u est bornée.
3. Le théorème de Bolzano-Weierstrass assure qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|u_{\varphi(n)} - u_n\right| \leq \dfrac{4e^2M_0}{2^n}$.
4. En déduire que u est convergente.

28 *Suites de Cauchy* On dit que $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si :
$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n_0,\quad \forall q \geq n_0,\quad \left|u_p - u_q\right| \leq \varepsilon$$

1. **a)** *Un exemple*. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy.
b) *Un autre exemple*. Pour tout $n \geq 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Montrer que $(H_n)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy
2. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée
3. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
4. Réciproquement montrer que toute suite de Cauchy est convergente à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass.

29
1. Soient $\ell \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. On suppose que toutes les sous-suite convergentes de u convergent vers ℓ. Montrer alors que u converge elle aussi vers ℓ.
2. *Application*. Soit u une suite réelle bornée.
On suppose que : $u_n + \dfrac{u_{2n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}$.
a) Soit $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente de u. On note a la limite de $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ et on définit la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$ et : $\forall k \in \mathbb{N},\quad a_{k+1} = 2(b - a_k)$.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers a_k.
b) En déduire à l'aide du résultat de **1.** que la suite (u_n) est convergente.