1 **1.** En deux temps :

(a) On montre que u possède une limite $\ell \geq 0$.
(b) On montre que $\ell = 0$

(a) Sachant que u est minorée par 0 il suffit de montrer que u est décroissante (à partir d'un certain rang). Pour cela choisir $\varepsilon > 0$ tel que $k + \varepsilon < 1$.
En écrivant la définition de la limite « $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to k$ », montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ à partir d'un certain rang

(b) Par l'absurde supposer $\ell \neq 0$. Montrer alors par opérations sur les limites que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ devrait tendre vers 1, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

2. Il suffit d'adapter la méthode de la question 1.

2 **1.** Vérifier que (w_n) est croissante et majorée : elle possède donc une limite finie ℓ. Reste à montrer que $\ell = 0$. Pour cela exprimer u_n à l'aide de $\sum_{k=0}^{n-1} w_k$ (télescopage) puis procéder par l'absurde en montrant que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ si $\ell \neq 0$. Par exemple si $\ell > 0$, revenir à la définition de la limite pour minorer les w_k APCR par $\dfrac{\ell}{2}$ ce qui permet de minorer $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} w_k$ par une suite de limite $+\infty$.

2. La question 1 fournit le signe de $u_{n+1} - u_n$.

3 En revenant à la définition de la limite et en choisissant ε convenablement, montrer qu'à partir d'un certain rang $|u_{n+1} - u_n| < 1$, ce qui imposera $u_{n+1} - u_n = 0$ car $u_{n+1} - u_n \in \mathbb{Z}$.

4 En notant $y_n = x_{n-1} + 2x_n$ pour tout $n \geq 1$, on obtient : $x_n = -\dfrac{1}{2}x_{n-1} + \dfrac{1}{2}y_n$ puis, par récurrence

$$x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n x_0 + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} y_{n-k}}_{R_n}$$

Le point délicat est de montrer que $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Pour cela revenir à la définition de la limite.
Fixer $\varepsilon > 0$ ainsi qu'un rang n_0 à partir duquel : $\left|y_n\right| \leq \varepsilon$.

Ensuite : $\quad |R_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2^{k+1}} \left|y_{n-k}\right|$.

Couper la somme en deux en l'indice $k = n - n_0$:

- Dans $\sum_{k=0}^{n-n_0} \dfrac{1}{2^{k+1}} \left|y_{n-k}\right|$, majorer $\left|y_{n-k}\right|$ par ε puis calculer la somme géométrique : on peut majorer ce morceau par ε.
- Dans $\sum_{k=n-n_0+1}^{n-1} \dfrac{1}{2^{k+1}} \left|y_{n-k}\right|$, majorer $\left|y_{n-k}\right|$ par une constante M (cette suite est bornée) puis calculer la somme géométrique : on peut majorer ce morceau par $\dfrac{1}{2^{n-n_0+1}}M$.

Finalement : $\quad |R_n| \leq \varepsilon + \dfrac{1}{2^{n-n_0+1}}M$.

La suite de terme général $u_n = \varepsilon + \dfrac{1}{2^{n-n_0+1}}M$ a pour limite ε donc peut-être majorée par 2ε à partir d'un certain rang.

5 **a)** Le facteur $\dfrac{1}{n}$ devant la somme permet d'écrire

$$b_n - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \ell)$$

Revenir ensuite à la définition de la limite.
Fixer $\varepsilon > 0$ et un rang n_0 à partir duquel $|a_k - \ell| \leq \varepsilon/2$.

Ensuite : $\quad |b_n - \ell| \leq \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k - \ell|$.

Pour $n \geq n_0$, couper la somme en deux en l'indice $k = n_0$:

- Dans $\dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} |a_k - \ell|$, on peut majorer les $|a_k - \ell|$ par $\frac{\varepsilon}{2}$
- L'autre morceau : $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} |a_k - \ell|$ est de la forme $\dfrac{1}{n} \times C$ pour une certaine constante C indépendante de n.

Finalement : $\quad |b_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{1}{n} \times C$.

La suite de terme général $a_n = \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{1}{n} \times C$ converge vers $\dfrac{\varepsilon}{2}$ donc est majorable par ε à partir d'un certain rang

b) Même principe que précédemment : revenir ensuite à la définition de la limite, fixer $A > 0$ ainsi qu'un rang n_0 à partir duquel $a_k \geq 2A$.
Couper la somme b_n en deux en l'indice $k = n_0$:

- $\dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \geq \dfrac{n - n_0}{n} \times 2A$.
- L'autre morceau : $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} a_k$ est de la forme $\dfrac{1}{n} \times C$

Finalement : $\quad b_n \geq \dfrac{n - n_0}{n} \times 2A + \dfrac{1}{n} \times C$.

La suite de terme général $u_n = \dfrac{n - n_0}{n} \times 2A + \dfrac{1}{n} \times C$ a pour limite $2A$ donc est minorable par A à partir d'un certain rang.

6 S'inspirer de la technique de découpe utilisée à l'exercice 5.
Le facteur $\dfrac{1}{n+1}$ devant la somme permet d'écrire

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) - ab = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k} - ab)$$

Ensuite faire apparaître les quantités $a_k - a$ et $b_{n-k} - b$ avec l'astuce classique : $\quad a_k b_{n-k} - ab = (a_k - a)b_{n-k} + a(b_{n-k} - b)$ ce qui donne

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) - ab = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_k - a)b_{n-k} + \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n} a(b_\ell - b)$$

Revenir enfin à la définition de la limite en s'inspirant de la technique de découpe utilisée à l'exercice 5 pour montrer que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_k - a)b_{n-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n} a(b_\ell - b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

7 Une possibilité est d'adapter la technique de découpe utilisée pour montrer le théorème de Cesàro.

En itérant l'inégalité de l'énoncé, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq q^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^k r_{n-1-k}$$

Fixer alors $\varepsilon > 0$ ainsi qu'un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $r_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Couper la somme en deux en l'indice $k = n - n_0 - 1$ ce qui permet de majorer u_n par une suite de limite $\frac{\varepsilon}{1-q}$.

On conclut comme dans les exercices précédents.

8 **1.** Il s'agit d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où la fonction $f : x \mapsto \sqrt{a+x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a) Fixer N tel que $a_n \in [a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p}]$ pour tout $n \geq N$.
Poser alors : $v_N = w_N$ et $w_N = u_N$ puis pour tout $n \geq N$:

$$v_{n+1} = \sqrt{a - \frac{1}{p} + v_n} \quad \text{et} \quad w_{n+1} = \sqrt{a + \frac{1}{p} + w_n}$$

Alors :

- D'une part, par récurrence, pour tout $n \geq N$: $v_n \leq u_n \leq w_n$
- D'autre part, comme à la question **1.** :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1+\sqrt{1+4(a-\frac{1}{p})}}{2} \quad \text{et} \quad w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1+\sqrt{1+4(a+\frac{1}{p})}}{2}$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{p}$ dans la définition de la limite pour (v_n) et (w_n), on obtient l'encadrement demandé à partir d'un certain rang.

b) Attention, le rang n_0 de la question **2a)** dépend de p donc on ne peut faire tendre p vers $+\infty$ dans l'encadrement. Revenir à la définition de la limite en fixant $\varepsilon > 0$ puis un rang p tel que

$$\frac{1+\sqrt{1+4(a-\frac{1}{p})}}{2} - \frac{1}{p} \geq \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} - \varepsilon$$

et

$$\frac{1+\sqrt{1+4(a+\frac{1}{p})}}{2} - \frac{1}{p} \leq \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} + \varepsilon$$

9

10 Considérer la sous suite (u_{10n}) et une autre sous-suite de la forme $(u_{10n+\dots})$ où « … » est à choisir judicieusement.

11 **1.** Considérer les sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

2. Supposer par l'absurde qu'il existe une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ convergente de limite $\ell > 0$ et obtenir une contradiction en étudiant la limite de $\left(\left|\ln u_{\varphi(n)}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

12 **1.** Utiliser la formule sur « $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ ».

Réponse : $u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n \cos\theta$.

2. a) La relation trouvée à la question 1 assure que ℓ vérifie $\ell + \ell = 2\ell\cos\theta$ ce qui impose $\ell = 0$.

b) (u_{2n}) doit tendre elle aussi vers 0 en tant que sous suite de u.
Mais la formule donnant $\cos(2a)$ montre par ailleurs que $u_{2n} = 2u_n^2 - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

13 **a)** Selon le théorème de la limite monotone si u ne converge pas, alors elle tend vers $+\infty$.
Dans ce cas (u_{2n}) tendrait elle aussi vers $+\infty$.

b) Noter $\ell_1 = \lim u_{2n}$, $\ell_2 = \lim u_{2n+1}$ et $\ell_3 = \lim u_{3n}$.
Par théorème pour montrer que u converge, il suffit de montrer que $\ell_1 = \ell_2$.
Pour cela :

- $\ell_1 = \ell_3$ car (u_{6n}) est à la fois une sous-suite de (u_{2n}) et une sous-suite de (u_{3n})
- Prouver de même que $\ell_2 = \ell_3$ en trouvant une suite extraite de u qui est à la fois une sous-suite de (u_{2n+1}) et une sous-suite de (u_{3n}) (chercher sous la forme $u_{6n+\dots}$)

14 Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers 0 à l'aide du théorème d'encadrement.

15 **a)** Pour $n \geq 1$: $v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k$ puis majorer la somme par une somme géométrique en utilisant l'hypothèse sur u avec $n = 2^k$.

b) Selon le théorème de la limite monotone si u ne converge pas, alors elle tend vers $+\infty$.
Dans ce cas (v_n) tendrait elle aussi vers $+\infty$.

16 Etant donné $x \in [-1, 1]$, écrit sous la forme $x = \cos\theta$ (par exemple pour $\theta = \operatorname{Arccos} x$) il s'agit de construire une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\cos(\ln\varphi(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos\theta$.
Pour cela on peut essayer définir $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ de sorte que $\ln\varphi(n)$ approche $2n\pi + \theta$.
Précisément vérifier que $\varphi(n) = \left\lfloor e^{2n\pi+\theta} \right\rfloor$ convient en montrant d'abord par encadrement que $\ln\varphi(n) - 2n\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$ puis à l'aide de la 2π-périodicité de cos que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos\theta$.

17 **1.** A n fixé, appliquer le TVI strictement monotone à f_n sur $[1, +\infty[$.

2. Suivre le savoir faire **SF 12**

3. Suivre le savoir faire **SF 12**

18 **1.** A n fixé, appliquer le TVI strictement monotone à f_n sur $[0, 1]$.

2. Suivre le savoir faire **SF 12**

19
- L'existence d'une borne supérieure pour A repose sur le fait que A est non vide et majorée : tout $b \in B$ est un majorant de A
- Le point précédent assure que A possède une borne supérieure α et que $\alpha \leq b$ pour tout $b \in B$
- Ce qui précède montre que α minore B donc en particulier que B possède une borne inférieure β telle que $\alpha \leq \beta$.
- Reste à montrer que $\alpha = \beta$. Pour cela utiliser la propriété sur (A, B) pour montrer que $\beta - \alpha \leq \varepsilon$ pour tout réel $\varepsilon > 0$.

20 Poser $M = \sup A - \inf A$ puis :

- Montrer que $|x - y| \leq M$ pour tous $x, y \in A$.
- Former une suite $d_n = |x_n - y_n|$ qui converge vers M (prendre (x_n) qui converge vers $\sup A$ et (y_n) vers $\inf A$).

21 **1.** Montrer que l'ensemble $D_x(A) = \{|x-a|\ ;\ a \in A\}$ est une partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$.

2. Si $x \in A$, $d(x,A) = 0$: c'est même le plus petit élément.

3. Par symétrie des rôles de x et y, il suffit de montrer que

$$d(x,A) - d(y,A) \leq \left|x-y\right|$$

Deux possibilités :

- *Utiliser les suites.* Considérer une suite (a_n) d'éléments de A telle que : $\left|y-a_n\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x,B)$ puis assurer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$d(x,A) \leq \left|x-y\right| + \left|y-a_n\right|$$
- *Montrer que* $d(x,A) - \left|x-y\right| \leq d(y,A)$. Il suffit pour cela de montrer que le réel : $m = d(x,A) - \left|x-y\right|$ est un minorant de l'ensemble $D_y(a) = \left\{\left|y-a\right|\ ;\ a \in A\right\}$ c'est à dire de montrer que pour tout $a \in A$:
$$d(x,A) - \left|x-y\right| \leq |x-a|$$

4. *Réponse à trouver :* $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in\,]0,1[\\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

22 Utiliser les suites (méthode 1 du savoir faire **SF 13**) à l'exception des cas où l'on a affaire à un plus grand/petit élément

1. 2 est le plus grand élément de A, $\inf A = 1$

2. 3/2 est le plus grand élément de A, $\inf A = -1$

3. $\sup A = 1$ et $\inf A = -1$

4. $\sup A = 1$ et $\inf A = -1$

5. $\sup A = \frac{1}{2}$ et $\inf A = 0$

23 **1.** Montrer que A est non vide et majoré.

2. Montrer que $s-1$ ne majore pas A.

3. Montrer que l'élément m de la question **2.** est un majorant de A, donc son plus grand élément.

24 **a)** On trouve que f possède $2\sqrt{2}$ pour minimum et ce minimum est atteint au point $x = \sqrt{2}$.

b) En remarquant que $\frac{p}{q} + 2\frac{q}{p} = f\left(\frac{p}{q}\right)$:

- La question a) assure que $2\sqrt{2}$ minore A.
- Si on prend une suite $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ de limite $\sqrt{2}$ alors $a_n = f(r_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\sqrt{2}$.

25 Suivre le savoir faire **SF 14** : étant donné $x \in \mathbb{R}$ constuire une suite d'éléments de E qui converge vers x. On peut s'inspirer des approximations décimales et considérer la suite de terme général $u_n = \dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$.

26 Tout l'exercice repose sur des évaluations judicieuses de la relation

$$(\star) \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Prendre $x = y = 0$ pour calculer $f(0)$.
Prendre x et $y = -x$ dans $(\star)$ pour prouver que $f(x) + f(-x) = 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, procéder par récurrence.
Pour l'hérédité, évaluer $(\star)$ avec nx et x.
Pour $n \in \mathbb{Z}^-$, écrire $n = -m$ avec $m \in \mathbb{N}$ et utiliser l'imparité de f et le fait que la relation est vraie sur $\mathbb{N}$.

3. Ecrire $r = \frac{p}{q}$ puis utiliser la question 2 pour écrire $qf(r) = f(qr) = f(p)$ puis à nouveau la question 2 pour « sortir » p : $f(p) = f(p \times 1) = pf(1)$.

4. Les suites d'approximations décimales (y_n) et (z_n) vérifient :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \leq x \leq z_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n, z_n \in \mathbb{Q}$
- $\lim y_n = \lim z_n = x$

Le premier point et la croissance de f assurent que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(y_n) \leq f(x) \leq f(z_n)$$

Le deuxième point et le troisième point et la question 3 assurent que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(y_n) = y_n a \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ax \quad \text{et} \quad f(z_n) = z_n a \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ax$$

Il reste à utiliser le théorème de passage aux limites.

27 **1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $M_{n+1} = \max(|u_{n+1}|, |u_{n+2}|)$, il s'agit de montrer que :

$$|u_{n+1}| \leq \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)M_n \quad \text{et} \quad |u_{n+2}| \leq \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)M_n$$

2. L'inégalité $1 + x \leq e^x$ appliqué dans le résultat de la question **1.** donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_{n+1} \leq e^{\frac{1}{2^n}} M_n$$

Itérer cette inégalité permet d'obtenir : $M_n \leq e^{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}} M_0$.
Il suffit de calculer la somme géométrique puis de majorer le résultat par 2.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_{\varphi(n)} - u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\varphi(n)-1} u_{k+1} - u_k$

Dans cette expression : $\quad u_{k+1} - u_k = \dfrac{u_{k-1}}{2^{k-1}}$.
Majorer la somme par inégalité triangulaire puis $|u_{k-1}| \leq M_k$
Utiliser **2.** et calculer la somme géométrique qui apparaît.

4. Ecrire $\quad u_n = u_{\varphi(n)} + \left(u_n - u_{\varphi(n)}\right) \quad$ puis raisonner par somme de limites.

28 **1. a)** Pour $1 \leq p \leq q$, majorer $S_q - S_p = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{k^2}$ par une somme télescopique en utilisant : $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

b) Raisonner par l'absurde : si (H_n) était de Cauchy alors $(H_{2n} - H_n)$ tendrait vers 0.

2. Adapter la preuve du résultat de cours selon lequel toute suite convergente est bornée.

3. Si u est convergente de limite ℓ, utiliser :

$$\left|u_p - u_q\right| \leq \left|u_p - \ell\right| + \left|u_q - \ell\right|$$

4. Etant donné une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente de limite ℓ, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ en revenant à la définition de la limite puis en écrivant : $|u_n - \ell| \leq \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right|$

29 **1.** Procéder par contraposition. Supposer que (u_n) ne converge pas vers ℓ et montrer qu'elle possède une sous-suite qui converge vers une limite autre que ℓ. Pour cela commencer par traduire l'hypothèse :

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq n_0 \mid |u_n - \ell| > \varepsilon$$

Elle permet de construire une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pour laquelle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| > \varepsilon$$

Précisément on peut poser :

$$\varphi(0) = \min\{n \geq 0 \ \mid \ |u_n - \ell| > \varepsilon\}$$

puis pour tout $k \geq 0$, si $\varphi(0), \ldots, \varphi(k)$ sont construits on pose

$$\varphi(k+1) = \min\{n \geq \varphi(k) + 1 \ \mid \ |u_n - \ell| > \varepsilon\}$$

La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ étant bornée on peut en extraire une sous-suite convergente $\left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)$. Reste à montrer que sa limite n'est pas ℓ.

2. a) Procéder par récurrence sur k. Pour l'hérédité, étant donné une sous-suite $\left(u_{\psi(n)}\right)$ de limite a_k, montrer que $\left(u_{2\psi(n)}\right)$ converge vers a_{k+1} en exprimant $u_{2\psi(n)}$ en fonction de $u_{\psi(n)}$ et $v_{\psi(n)}$ où v est la suite $\left(u_n + \dfrac{u_{2n}}{2}\right)$.

b) La suite (a_k) est arithmético-géométrique de raison -2 ce qui donne, pour tout $k \geq 1$: $\quad a_k = \alpha + (-2)^k\left(a - \alpha\right)$ où $\alpha = \dfrac{2b}{3}$. Le fait que la suite (a_k) soit bornée impose : $a = \alpha$. Conclure à l'aide de la question **1.**.