1 **a)** f n'est pas surjective : trouver un élément (simple !) de $\mathbb{R}_+$ qui n'a pas d'antécédent par f.

b) f est bijective. Pour $y > 1$ fixé résoudre l'équation $f(x) = y$ (par équivalence) on obtient $f(x) = y \iff x = -\ln(y-1)$.

c) f n'est pas injective : trouver deux éléments distincts ayant la même image.

d) f est bijective. Pour $y \in]-1,1[$ fixé résoudre l'équation $f(\theta) = y$ d'inconnue $\theta \in [3\pi, 4\pi]$.
$f(\theta) = y \iff \underbrace{\text{Arccos}(\cos\theta)}_{=?} = \text{Arccos}\, y$
il reste à simplifier Arccos(cos θ) lorsque $\theta \in [3\pi, 4\pi]$ (attention ce n'est pas θ).

2 Utiliser la méthode 3 du savoir-faire SF 10

1. Fixer $y \in]-1,1[$ et résoudre l'équation $\text{th}\, x = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. *Réponse :* $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

2. Fixer $y \in \mathbb{R}$ et résoudre l'équation $\text{sh}\, x = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. *Réponse :* $x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$

3
- f_a est injective ssi $a \geq 0$.
- f_a est surjective ssi $a \leq 0$.

4 **a)** f est surjective mais n'est pas injective.

b) f est injective mais n'est pas surjective.

5 Noter que pour $a \in \mathbb{C}$: $f(z) = a$ ssi z est une racine de l'équation du second degré : $z^2 + 3z + (i-a) = 0$.
La fonction f n'est pas injective (trouver par exemple les antécédents de $a = 0$, ou plus simple de $a = i$) mais est surjective (l'équation du second degré possède, d'après le cours, toujours une ou deux solutions).

6 Utiliser la méthode 3 du savoir-faire SF 10

a) Fixer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et résoudre l'équation $f(x,y) = (a,b)$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Pour cela noter que : $f(x,y) = (a,b) \iff \begin{cases} 2x + y = a \\ 3x - 2y = b \end{cases}$.

Donc résoudre l'équation $f(x,y) = (a,b)$ revient à résoudre le système précédent.
Réponse : $x = \frac{2a+b}{7}$, $y = \frac{3a-2b}{7}$

b) Fixer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et résoudre l'équation $f(x,y,z) = (a,b,c)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Réponse : $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{-3b-c}{2}$, $z = \frac{a+2b+c}{2}$

7 **1. a)** Il s'agit de montrer que si $z \in \mathbb{U}$, alors $1 + \overline{\alpha}z \neq 0$. Pour le justifier on peut par exemple utiliser le fait que $|\overline{\alpha}z| \neq 1$

b) Il y a plusieurs possibilités, par exemple :
- on peut montrer que $\overline{f(z)} = \frac{1}{f(z)}$ (utiliser $\overline{z} = \frac{1}{z}$)
- on peut directement montrer que $\left|\frac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}\right| = 1$ en factorisant le dénominateur par z et en exploitant les propriétés du module.

2. Utiliser la méthode 3 du savoir-faire SF 10 : fixer $Z \in \mathbb{U}$ et résoudre l'équation $f(z) = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{U}$.
Réponse : $z = \frac{Z-\alpha}{1-\overline{\alpha}Z}$

8 **1.** Ne pas hésiter à calculer les premières valeurs de f et g (par ex. $f(0), f(1), \dots, f(6)$ et $g(0), \dots, g(6)$).
f est injective mais pas surjective.
g est surjective mais pas injective.

2. $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$

9 **1.**
- *Si f est injective.* Pour montrer que $A \cup B = E$, montrer que $f(A \cup B) = f(E)$ et utiliser l'injectivité de f.
- *Si $A \cup B = E$.* Pour montrer que f est injective, utiliser le savoir-faire SF 4 . Si X et X' sont telles que $f(X) = f(X')$, pour montrer que $X = X'$ écrire
$$X = X \cap E = X \cap (A \cup B)$$

2.
- *Si f est surjective.* Pour montrer que $A \cap B = \varnothing$, considérer un antécédent X de $(A, \varnothing)$.
- *Si $A \cap B = \varnothing$.* Pour montrer que f est surjective, si $A' \subset A$ et $B' \subset B$, montrer que $A' \cup B'$ est un antécédent de (A', B') par f.

10 Utiliser les savoirs faire SF 11 et SF 12 dans le cas des fonctions réelles :
- $f(\mathbb{R}) = [-1/e, +\infty[$ (avec le tableau de variation de f)
- $f^{-1}(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_-$ (en résolvant $f(x) \leq 0$).

11 Utiliser le savoir faire SF 11 dans le cas des fonctions réelles : $f(\mathbb{R}_+^*)$ se trouve en dressant le le tableau de variation de f.

12
- Résoudre l'équation $f(x) = 0$:

Solutions. $f^{-1}(\{0\}) = \left\{\frac{1}{k} \; ; \; k \in \mathbb{N}^*\right\}$

- Tableau de variation de f impossible à dresser sur $]0,1]$.
On peut procéder par double inclusion en notant que $f(]0,1]) \subset [-1,1]$.
Pour montrer que $[-1,1] \subset f(]0,1])$, trouver un antécédent de -1 par f et un antécédent de 1 par f et utiliser ensuite le TVI.

13 Utiliser les savoirs faire SF 11 et SF 12 dans le cas des fonctions réelles :

a) Avec le tableau de variation de f :
$f(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$

b) En résolvant : $f(x) \geq 2$:
$f^{-1}([2, +\infty[) =]-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$

c) $f^{-1}([-1,0]) = \varnothing$.

14 **1.** Procéder par double inclusion en rédigeant soigneusement le début de chaque raisonnement.
Pour montrer que $f\left(\mathbb{U} \setminus \{1\}\right) \subset \mathbb{R}$.
Le début doit être : « Soit $Z \in f\left(\mathbb{U} \setminus \{1\}\right)$,
il existe $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ tel que : $Z = i\frac{z+1}{z-1}$. »
Il s'agit ensuite de montrer que $Z \in \mathbb{R}$.
- *Première possibilité.* En montrant que $\overline{Z} = Z$
- *Deuxième possibilité.* En écrivant z sous la forme $z = e^{i\theta}$ et en utilisant les factorisations de $1 \pm e^{i\theta}$.

Pour montrer que $\mathbb{R} \subset f\left(\mathbb{U} \setminus \{1\}\right)$.
Fixer $x \in \mathbb{R}$ et construire $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ tel que $f(z) = x$ (ici on peut résoudre l'équation $f(z) = x$, on obtient $z = \frac{x+i}{x-i}$).

2. On peut ici se ramener au cas d'une fonction réelle, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} > 0$: $f(x) = i\frac{x+1}{x-1}$ donc $f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = ig(\mathbb{R} \setminus \{1\})$ où $g : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$. Il suffit alors d'étudier g sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Réponse : $f(\Delta) = i\big(\mathbb{R} \setminus \{1\}\big)$.

15 **1.** Procéder par double inclusion (comme à l'exercice 14)

2. On peut ici se ramener au cas d'une fonction réelle :
$$f(\Delta) = \{f(iy)\,;\, y > 0\} = \left\{\frac{y-1}{y+1}\,;\, y > 0\right\} = g(\mathbb{R}_+^*)$$
où $g : y \mapsto \dfrac{y-1}{y+1}$. Il suffit alors d'étudier g sur $\mathbb{R}_+^*$.
Réponse : $f(\Delta) =]-1\,,1[$.

3. On peut procéder par équivalences :
$$z \in f^{-1}(D) \Leftrightarrow |f(z)| < 1$$
En cherchant alors z sous forme algébrique $z = x + iy$, on obtient : $\quad |f(z)| < 1 \iff y > 0$.

16 **1.** On peut procéder par équivalence en partant de la définition : $(x,y) \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow (x+y, xy) \in A$. *Réponse :*
$f^{-1}(A) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x-1\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x+1\big\}$

2. Utiliser les résultats sur la somme et le produit des racines :
$(s,p) \in f(\mathbb{R}^2)$ ssi il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x+y = s \\ xy = t \end{cases}$
ssi il existe deux *réels* $x, y \in \mathbb{R}$ solutions de $z^2 - sz + p = 0$
Réponse : $f(\mathbb{R}) = \big\{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 \geq 4p\big\}$.

17 **1.** Il s'agit de montrer que f est injective donc le point de départ doit être :
« Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. »
Appliquer ensuite g et utiliser l'injectivité de $g \circ f$ pour montrer que $x = x'$.

2. Il s'agit de montrer que g est surjective donc le point de départ doit être : « Soit $z \in G$. »
Il s'agit de *construire* $y \in F$ tel que $g(y) = z$.
Commencer par utiliser la surjectivité de $g \circ f$:
« Il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$ ».
Reste à définir y à partir de x.

3. Il s'agit de montrer que g est injective donc le point de départ doit être : « Soient $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$. »
Utiliser alors la surjectivité de f :
« il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ » et
« il existe $x \in E$ tel que $f(x') = y'$ ».
Utiliser enfin l'injectivité de $g \circ f$ pour montrer que $x = x'$ puis enfin que $y = y'$ (en appliquant f).

4. Il s'agit de montrer que f est surjective donc le point de départ doit être : « Soit $y \in F$. »
Il s'agit de *construire* $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Commencer par utiliser la surjectivité de $g \circ f$ pour construire un antécédent de $g(y)$: « Il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = g(y)$ ».
Conclure à l'aide de l'injectivité de g.

18 **1.** Il s'agit de montrer : $\quad \forall x \in E,\ f(x) = x$
Fixer $x \in E$. Evaluer l'égalité $f \circ f = f$ puis utiliser l'hypothèse sur f.

2. Il s'agit de montrer : $\quad \forall y \in E, \quad f(y) = y$
Fixer $y \in E$ et utiliser la surjectivité de f :
« Il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ »
Evaluer ensuite l'égalité $f \circ f = f$.

19 On utilise les résultats des questions 1 et 2 de l'exercice 17.
$f \circ (g \circ f)$ est surjective donc f l'est aussi.
$(f \circ g) \circ f$ est injective donc f l'est aussi.
Ainsi f est bijective.
Pour montrer que g est bijective, exprimer g en fonction de f^{-1} et de $\varphi = f \circ g \circ f$ en partant de $f \circ g \circ f = \varphi$ puis en composant par f^{-1} à gauche et à droite.

20 **1.** Il s'agit de montrer que $g : F \to E$ est surjective donc le point de départ doit être : « Soit $x \in E$. »
Il s'agit de *construire* $y \in F$ tel que $g(y) = x$.
L'égalité $f \circ g \circ f = f$ permet d'écrire $f \circ g \circ f(x) = f(x)$, reste à utiliser l'injectivité de f.

2. Il s'agit de montrer que f est injective donc le point de départ doit être : « Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. »
Utiliser la surjectivité de g pour écrire cette égalité sous la forme $f(g(y)) = f(g(y'))$.
Appliquer alors g à l'égalité puis remplacer $g \circ f \circ g$ par g.

21 **1.** Procéder par récurrence forte sur n.
Pour l'hérédité, supposer par l'absurde que $f(n) = k$ pour un certain $k \in [\![0\,, n-1]\!]$.
L'hypothèse de récurrence forte assure alors que $k = f(k)$ et l'injectivité de f amène à une contradiction.

2. Procéder par récurrence forte sur n.
Pour l'hérédité, considérer un antécédent k de $n+1$. L'hypothèse faite sur f assure que $n+1 = f(k) \geq k$. Supposer par l'absurde que $k \in [\![0\,, n]\!]$. Utiliser l'hypothèse de récurrence forte sur k pour dégager une contradiction.

22 Montrer par analyse-synthèse que la seule solution est $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}$. Pour l'analyse, montrer par récurrence forte sur n que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = n$$
Pour l'hérédité, utiliser (après l'avoir montré), le caractère injectif de f.

23 Il s'agit de garder en tête que l'on s'intéresse à des inclusions entre des ensembles donc attention à la rédaction.

a) Le début doit être : soit $y \in f(A \cap A')$.
Il suffit alors de traduire ce que cela signifie (« il existe ... ») pour arriver à la fin à savoir $y \in f(A)$ et $y \in f(A')$.

b) Procéder par double inclusion. Compte tenu du a), il reste à montrer que $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$.
Le début doit être : soit $y \in f(A) \cap f(A')$.
Attention à la traduction :

- $y \in f(A)$ donc il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$
- $y \in f(A')$ donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = y$ (a priori x' n'est pas forcément égal à x)

Il s'agit de montrer que $x = x'$ (il y a une hypothèse sur f dans cette question).

24 Vérifier que les trois critères de la définition d'une relation d'ordre sont satisfaits.

25 Il y a deux questions :

1. On suppose f injective. Il s'agit de montrer que T est injective.
Le début doit être :
« Soient $f, f' \in \mathscr{F}(E,F)$ telles que $T(f) = T(f')$ ».

Il s'agit de montrer que $f = f'$, égalité entre deux fonctions, donc il s'agit de montrer :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = f'(x)$$

Fixer $x \in E$ et essayer de montrer que $f(x) = f(x')$.
Pour cela, traduire l'égalité $T(f) = T(f')$.
Par définition de T cela signifie $\varphi \circ f = \varphi \circ f'$
Evaluer cette égalité en x et utiliser l'injectivité de φ.

2. On suppose T injective.
Il s'agit de montrer que $\varphi : F \to G$ est injective.
Le début doit être :
« Soient $y, y' \in E$ tels que $\varphi(y) = \varphi(y')$ ».
Il s'agit de montrer que $y = y'$.
Pour utiliser l'injectivité de T il s'agit de définir des applications f et f' permettant de réécrire l'égalité $\varphi(y) = \varphi(y')$ à l'aide de T.
Pour cela considérer la fonction $f : E \to F$ constante de valeur y *i.e.* telle que : $\forall x \in E, \quad f(x) = y$.
De même considérer $f' : E \to F$ constante de valeur y' *i.e.* telle que : $\forall x \in E, \quad f'(x) = y'$.
Avec ces notations $\varphi(y) = \varphi(y')$ s'écrit aussi $\varphi \circ f = \varphi \circ f'$.
Il reste à utiliser l'injectivité de T.

26 Il s'agit de garder en tête que l'on s'intéresse à des inclusions entre des ensembles donc attention à la rédaction.
Il y a deux questions :

1. On suppose f bijective.
On fixe une partie $A \in \mathscr{P}(E)$ et il s'agit de montrer l'égalité entre ensembles : $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.
Procéder par double inclusion :

- On montre d'abord que $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.
  Le début doit être : « Soit $y \in f\left(\overline{A}\right)$ ».
  Il s'agit d'arriver à montrer que $y \notin f(A)$.
  On peut par exemple procéder par l'absurde en traduisant soigneusement $y \in f\left(\overline{A}\right)$ et $y \in f(A)$ (attention aux noms des antécédents, il faut utiliser deux noms différents).
  On arrive à une contradiction en utilisant l'injectivité de f.
- On montre ensuite que $\overline{f(A)} \subset f\left(\overline{A}\right)$. Le début doit être : « Soit $y \in \overline{f(A)}$ ».
  Il s'agit d'arriver à montrer que $y \in f\left(\overline{A}\right)$.
  Pour cela, commencer par utiliser la surjectivité de f : il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$, puis le fait que $y \notin f(A)$.

2. On suppose que pour toute $A \in \mathscr{P}(E)$: $\quad f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.
Il s'agit maintenant de montrer que f est bijective.
Procéder en deux temps :

- *Injectivité de f*. Le début doit être : « Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ ».
  Posant $y = f(x) = f(x')$ et $A = \{x\}$ on a $f(A) = \{y\}$.
  Procéder par exemple par l'absurde : $x' \neq x$ signifie $x' \in \overline{A}$ et alors $y = f(x') \in f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, cela signifierait que $y \notin f(A) = \{y\}$ ce qui est impossible.
- *Surjectivité de f* De façon ensembliste il s'agit de montrer que $f(E) = F$.
  Or $E = \overline{\varnothing}$ et $f(\varnothing) = \varnothing$ donc $\overline{f(\varnothing)} = F$.

27 On suppose par l'absurde qu'il existe une surjection f de E dans $\mathscr{P}(E)$ et on note $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.
Par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = A$.
La contradiction vient de fait que chaque alternative $x \in A$ et $x \notin A$ est impossible ($x \in A$ conduit à $x \notin A$ et, de même $x \notin A$ conduit à $x \in A$).

28 **1. a)** Fixer $x \in A$ et vérifier que $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$ en utilisant **SF 11** et **SF 12**.

b) Procéder par double inclusion.

c) Etant donnés $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$ on peut par exemple considérer $A = \{x\}$ et $A' = \{x'\}$.

2. a) Traduire $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$ en utilisant **SF 11** puis **SF 12**)

b) Procéder par double inclusion.

c) Prendre $B = F$.

29 **1.** Oui : trouver un exemple très simple.

2. Oui : trouver un exemple.

3. Non : raisonner par l'absurde et considérer le plus grand élément de $f(B)$.

30 *Réponse à trouver :* toutes les applications de la forme $n \mapsto c \pm n$ où c décrit $\mathbb{Z}$.