Inclusion, égalité d'ensembles

1 Etablir chacune des inclusions entre ensemble suivantes :

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4x-2\right\} \subset \mathbb{R}_+$.

b) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R} \mid x = 2t \text{ et } y = t^2+1\right\} \subset \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \leq y\right\}$

2 On pose $E = \left\{\dfrac{1}{k(k+1)}\ ;\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$ et $F = \left\{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}\ ;\ n,m \in \mathbb{N}^*\right\}$.

a) Montrer que $E \subset F$.

b) Y a-t-il égalité entre ces deux ensembles ?

3 SF 1 Etablir : $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$.

4 SF 1 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.
Montrer : $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

5 SF 1 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E.
Montrer : $(A \cup C = B \cup C \text{ et } A \cap C = B \cap C) \Longrightarrow A = B$.

6 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E.
Démontrer : $A \cup B = A \cap C \Longleftrightarrow (B \subset A \text{ et } A \subset C)$.

Relations d'ordre, relations d'équivalence

7 SF 2 Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.
On suppose que $\mathscr{R}$ est réflexive et vérifie :

$$\forall x,y,z \in E,\quad \left(x\mathscr{R}y \quad \text{et} \quad y\mathscr{R}z\right) \Longrightarrow z\mathscr{R}x$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

8 SF 2 Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E, réflexive et symétrique. On définit sur E une relation $\mathscr{S}$ en posant, pour tous $x,y \in E$:

$$x\mathscr{S}y \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists x_0,\dots,x_n \in E \\ x_0 = x \quad \text{et} \quad x_n = y \\ \forall k \in [\![0,n-1]\!], \quad x_k\mathscr{R}x_{k+1} \end{cases}$$

Montrer que $\mathscr{S}$ est une relation d'équivalence sur E.

9 SF 3 Pour tous $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\mathscr{C}(a,r)$ le cercle de centre a et de rayon r *i.e.* $\mathscr{C}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r\}$.
On note E l'ensemble de ces cercles et on définit sur E une relation binaire $\lhd$ en posant, pour tous $a,a' \in \mathbb{C}$ et $r,r' \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathscr{C}(a,r) \lhd \mathscr{C}(a',r') \Longleftrightarrow \left|a-a'\right| \leq r'-r$$

Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre sur E.

10 SF 2 On définit une relation $\sim$ sur $\mathbb{R}$ en posant pour tous $x,y \in \mathbb{R}$: $\quad x \sim y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$.

1. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer selon la valeur de $k \in \mathbb{R}$ le nombre d'éléments dans la classe d'équivalence de k.

11 SF 3 On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivables, telles que $f(0) = 1$. On définit sur E une relation binaire $\lhd$ en posant, pour toutes $f,g \in E$:

$$f \lhd g \Longleftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad f'(x) \leq g'(x)\right)$$

1. Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre sur E. Cette relation est elle totale ?
2. Soient $f,g \in E$.
   a) Montrer : $\quad f \lhd g \Longrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad f(x) \leq g(x)\right)$
   b) A-t-on : $\quad \left(\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad f(x) \leq g(x)\right) \Longrightarrow f \lhd g$?

12 SF 3 On définit une relation $\lhd$ sur $\mathbb{N}^*$ en posant pour tous $x,y \in \mathbb{N}^*$: $\quad x \lhd y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \mid y = x^n$.
Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre sur E. Cette relation est elle totale ?

13 SF 2 Soit E un ensemble non vide et $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$ non vide et vérifiant la propriété suivante :

$$\forall A,B \in \mathscr{A}, \exists C \in \mathscr{A} \mid C \subset A \cap B$$

On définit une relation $\sim$ sur $\mathscr{P}(E)$ en posant pour toutes $X,Y \in \mathscr{P}(E)$: $\quad X \sim Y \Longleftrightarrow \exists A \in \mathscr{A} \mid A \cap X = A \cap Y$.

1. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire les classes d'équivalences de $\varnothing$ et de E.

14 SF 3 On définit sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ une relation $\lhd$ en posant, pour tous $x,y,x',y' \in \mathbb{R}$:

$$(x,y) \lhd (x',y') \Leftrightarrow \left|x'-x\right| \leq y'-y$$

1. Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
2. On fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement :
   - l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y) \lhd (a,b)$
   - l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a,b) \lhd (x,y)$

   La relation $\lhd$ est elle totale ?