1

2 **a)** Attention à la rédaction, le début doit être : « soit $x \in E$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{1}{k(k+1)}$ ».
Ensuite, penser à écrire $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

b) Il n'y a pas égalité : il s'agit de trouver *un* élément qui appartient à F mais pas à E. Noter que les éléments de E sont tous strictement positifs.

3 Poser $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$.
Procéder par double-inclusion. Pour montrer que $E \subset F$, attention à la rédaction.
Le début doit être : « soit $z \in E$ ».
Ensuite on peut par exemple écrire z sous la forme $z = x + iy$ puis calculer $|z-1|$ et $|z+1|$ en fonction de x et y pour montrer que $y = 0$.
Pour montrer que $F \subset E$, attention à la rédaction.
Le début doit être : « soit $z \in F$ ».
Ensuite on peut par exemple écrire z sous la forme $z = iy$ puis calculer $|z-1|$ et $|z+1|$.

4 •*Première méthode*. Par double inclusion.
Il suffit de bien écrire pour chaque inclusion : « Soit $x \in \ldots$ » puis de traduire soigneusement les hypothèses.
•*Deuxième méthode*. En utilisant les propriétés de la réunion et de l'intersection.
Ecrire $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (A \cap \overline{C}) \cap (A \cap \overline{B})$ puis « factoriser » par A en utilisant la distributivité de l'intersection sur la réunion.

5 Il s'agit de prouver une implication donc ne pas hésiter à reformuler le problème sous la forme d'un nouvel énoncé :
« Supposons que $A \cup C = B \cup C$ et que $A \cap C = B \cap C$ » (ce que l'on peut utiliser dans la suite)
« Montrons que $A = B$ » (c'est la question de l'exercice).
Ensuite procéder par double-inclusion. Pour montrer que $A \subset B$, fixer $x \in A$, le début doit donc être : « Soit $x \in A$ ».
Montrer alors que $x \in B$ en distinguant deux cas : lorsque $x \in C$ et lorsque $x \notin C$.
Procèder de même pour montrer que $B \subset A$.

6 Il s'agit de prouver une équivalence donc il y a deux choses à faire :

- D'abord : « Supposons que $A \cup B = A \cap C$ »
  « Montrons que $B \subset A$ et $A \subset C$ ».
  Ensuite la rédaction doit être : « soit $x \in B \ldots$ donc $x \in A$ » puis « soit $x \in A \ldots$ donc $x \in C$ ».
- Ensuite « Supposons que $B \subset A$ et $A \subset C$ »
  « Montrons que $A \cup B = A \cap C$ » (On peut procéder par double inclusion ou simplifier $A \cup B$ et $A \cap C$ compte tenu des hypothèses)

7 La symétrie s'obtient en prenant $z = y$ dans la propriété de l'énoncé. On montre ensuite la transitivité en combinant la propriété de l'énoncé et la symétrie de $\mathscr{R}$.

8 On vérifie les trois critères de la définition d'une relation d'équivalence.

9 Vérifier que les trois critères de la définition d'une relation d'ordre sont satisfaits. Pour la transitivité, utiliser l'inégalité triangulaire.

10 **1.** On vérifie sans trop de difficulté les trois critères de la définition d'une relation d'équivalence.

2. Etant fixé $k \in \mathbb{R}$, il s'agit de déterminer le nombre de $x \in E$ tels que $xe^k = ke^x$ i.e. tels que $xe^{-x} = ke^{-k}$.
Il suffit d'étudier la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ pour déterminer le nombre d'antécédents de $ke^{-k} = f(k)$ par f.
Réponse :

- *Si $k \leq 0$ ou $k = 1$, il y a un seul élément.*
- *Si $0 < k < 1$, il y a deux éléments.*
- *Si $k > 1$, il y a deux éléments.*

11 **1.** Vérifier les trois critères de la définition d'une relation d'ordre. Le seul point qui mérite une justification est l'antisymétrie, où l'on doit utiliser $f(0) = g(0)$.
Cette relation d'ordre n'est pas totale, par exemple $f = 1$ et $g = \cos$ ne sont pas comparables.

2. a) Si $f \lhd g$ alors la fonction $\varphi = g - f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(0) = 0$.

b) Le sens réciproque est faux, un contre-exemple est $f = 1$ et $g = 1 + \sin^2$

12 L'ordre est partiel. Par exemple 2 et 3 ne sont pas comparables (2 n'est pas une puissance de 3 et 3 n'est pas non plus une puissance de 2).

13 **1.** Seule la transitivité demande du travail : si $X \sim Y$ et $Y \sim Z$ et si $A, B \in \mathscr{A}$ sont telles que $X \cap A = Y \cap A$ et $Y \cap B = Z \cap B$, considérer $C \in \mathscr{A}$ telle que $C \subset A \cap B$ et montrer que $X \cap C = Z \cap C$.

2. $\mathrm{cl}(\varnothing)$ est l'ensemble des parties de E disjointes d'au moins un des éléments de $\mathscr{A}$.
$\mathrm{cl}(E)$ est l'ensemble des parties de E qui contiennent au moins un des éléments de $\mathscr{A}$.

14 **1.** Pour la transitivité, si $(x,y) \lhd (x',y')$ et $(x',y') \lhd (x'',y'')$, utiliser l'inégalité triangulaire pour majorer $|x - x''|$.

2. Pour déterminer les couples (x,y) tels que $(x,y) \lhd (a,b)$:

- Si $y > b$ alors $(x,y) \not\lhd (a,b)$
- Si $y \leq b$, alors en notant $r = b - y$, $(x,y) \lhd (a,b)$ ssi $|x-a| \leq r$ i.e. $x \in [a-r, a+r]$.

Procéder de même pour les couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a,b) \lhd (x,y)$. Graphiquement, on « voit » que la relation n'est pas totale vu que certains couples (x,y) ne sont dans aucune des deux catégories.