Injectivité, surjerctivité, bijectivité

Fonctions réelles

1 SF 5 SF 8 SF 10 Dans chacun des cas, déterminer si f est bijective. Si oui déterminer sa fonction réciproque

a) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$ **b)** $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow &]1,+\infty[\\ x & \longmapsto & e^{-x}+1 \end{array}$

c) $f: \begin{array}{rcl} [0,3\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ \theta & \longmapsto & \cos\theta \end{array}$ **d)** $f: \begin{array}{rcl} [3\pi,4\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ \theta & \longmapsto & \cos\theta \end{array}$

2 SF 10 **1.** Montrer que la fonction th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et déterminer sa réciproque.
2. Montrer que la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa réciproque.

3 SF 5 SF 7 SF 8 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f_a(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } x \geq 0 \\ x-a & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
Déterminer les réels a pour lesquels f_a est injective.
Même question pour surjective.

Exemples plus généraux

4 SF 4 SF 5 SF 7 SF 8 Les application suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?
a) $f : (x,y) \mapsto 2y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
b) $f : (x,y) \mapsto (1, x-y, y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

5 SF 5 SF 7 On note f l'application $z \mapsto z^2+3z+i$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$
a) f est-elle injective ? **b)** f est-elle surjective ?

6 SF 10 Dans chacun des cas suivants, montrer que f est bijective et calculer sa réciproque.
a) $f : (x,y) \mapsto (2x+y, 3x-2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$
b) $f : (x,y,z) \mapsto (x+y+z,\ x-y-z,\ -3x+y+3z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

7 SF 10 Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ tel que $|\alpha| \neq 1$.
On considère l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}$.
1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}$:
a) $f(z)$ est défini **b)** $f(z) \in \mathbb{U}$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ et déterminer sa réciproque.

8 SF 5 SF 7 SF 8 Soient f, g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $f(n) = 2n$ et $g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et de g.
2. Que vaut $g \circ f$?

9 SF 4 SF 6 SF 7 SF 9 Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On considère l'application $f: \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$
1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Image directe, image réciproque

Fonctions réelles

10 SF 11 SF 12 On considère la fonction $f : x \mapsto xe^x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer : $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\mathbb{R}_-)$.

11 SF 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f : x \mapsto x^n \ln x$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer $f(\mathbb{R}_+^*)$.

12 SF 11 SF 12 On considère la fonction $f : x \mapsto \sin\dfrac{\pi}{x}$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer : $f^{-1}(\{0\})$ et $f(]0,1])$.

13 SF 11 SF 12 On note f la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.
Déterminer : **a)** $f\big(\mathbb{R}\setminus\{-1\}\big)$ **b)** $f^{-1}\big([2,+\infty[\big)$ **c)** $f^{-1}\big([-1,0]\big)$

Exemples plus généraux

14 SF 11 On considère l'application $f : z \mapsto i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
a) Démontrer : $f\big(\mathbb{U} \setminus \{1\}\big) = \mathbb{R}$
b) Déterminer $f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$.

15 SF 11 SF 12 On considère l'application $f : z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.
1. Démontrer que : $f\big(\mathbb{R}\big) = \mathbb{U} \setminus \{1\}$.
2. On pose $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } \operatorname{Im} z > 0\}$. Déterminer $f(\Delta)$
3. On pose $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Déterminer $f^{-1}(D)$.

16 SF 11 SF 12 On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = (x+y, xy)$.
1. On pose $A = \big\{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p = 1\big\}$.
Déterminer $f^{-1}(A)$
2. Soit $(s,p) \in \mathbb{R}^2$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $(s,p) \in f(\mathbb{R}^2)$.
Indication : Se rappeler les résultats sur la somme et le produit des racines d'un trinôme : $t^2 - st + p$

Exercices abstraits sur les applications

17 SF 4 SF 6 SF 7 SF 9 On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

18 SF 6 SF 9 Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f = f$.

a) Montrer que si f est injective alors $f = \mathrm{Id}_E$.

b) Montrer que si f est surjective alors $f = \mathrm{Id}_E$.

19 SF 10 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives

20 SF 4 SF 6 SF 7 SF 9 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

1. On suppose que $f \circ g \circ f = f$ et que f est injective. Montrer que g est surjective.
2. On suppose que $g \circ f \circ g = g$ et que g est surjective. Montrer que f est injective.

21 SF 6 SF 9 On considère une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. On suppose que f est injective et que : $f(n) \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\quad f(n) = n$.
2. On suppose que f est surjective et que : $f(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\quad f(n) = n$.

22 SF 4 SF 6 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que : $f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3\mathrm{Id}_{\mathbb{N}^*}$

23 SF 6 SF 11 Soit $f : E \to F$ une application et $A, A' \in \mathscr{P}(E)$.

a) Montrer que : $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$

b) Montrer que si f est injective : $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$

24 SF 6 SF 3 Soient E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective. On définit sur E une relation binaire $\lhd$ en posant, pour tous $x, y \in E$:

$$x \lhd y \iff f(x) \leq f(y)$$

Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre sur E.

25 SF 4 SF 6 Soient E, F, G trois ensembles non vides et $\varphi : F \to G$ une application.
On considère l'application $\begin{array}{rccl} T : & \mathscr{F}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E,G). \\ & f & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$
Montrer que T est injective si et seulement si φ l'est.

26 SF 4 SF 6 SF 9 SF 10 SF 11 Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que f est bijective si et seulement si pour toute partie A de E : $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

27 SF 9 Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective de E sur $\mathscr{P}(E)$. *Indication : Raisonner par l'absurde et considérer $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.*

28 SF 4 SF 6 SF 7 SF 9 SF 11 SF 12
Soit $f : E \to F$ une application

1. a) Montrer que pour toute $A \in \mathscr{P}(E)$: $A \subset f^{-1}\left(f(A)\right)$.

   b) Montrer que si f est injective, alors $A = f^{-1}\left(f(A)\right)$ pour toute partie $A \in \mathscr{P}(E)$.

   c) Montrer que la réciproque est vraie.

2. a) Montrer que pour toute $B \in \mathscr{P}(F)$: $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

   b) Montrer que si f est surjective, alors $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$ pour toute partie $B \in \mathscr{P}(F)$.

   c) Montrer que la réciproque est vraie.

29 SF 6 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application bijective. On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < n\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \geq n\}$.

1. Est-il possible que A soit fini et B infini ?
2. Est-il possible que A et B soient infinis ?
3. Est-il possible que A soit infini et B fini ?

30 SF 6 Trouver toutes les applications injectives de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ telles que l'image d'un intervalle d'entiers est un intervalle d'entiers.