

1 Résolution de (S_1)

$$\begin{aligned}
 (S_1) &\Leftrightarrow \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y - 3z = 0 \\ -y + 2z = -1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 0 \\ -y + 2z = -1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 0 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \begin{cases} z = -1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le système a pour unique solution le triplet $(1, -1, 1)$.

Résolution de (S_2)

$$\begin{aligned}
 (S_2) &\Leftrightarrow L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{cases} x - y + 3z = -1 \\ 7x + y + 5z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \begin{cases} x - y + 3z = -1 \\ 8y - 16z = 8 \\ 2y - 4z = 2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow L_2 \leftarrow \frac{1}{8}L_2 \begin{cases} x - y + 3z = -1 \\ y - 2z = 1 \\ 2y - 4z = 2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = -1 \\ y - 2z = 1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases} \begin{cases} 0 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 3z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 2z + 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système est

$$\{(-z, 2z + 1, z); z \in \mathbb{R}\} = (0, 1, 0) + \text{Vect}((-1, 2, 1))$$

Résolution de (S_3) :

$$\begin{aligned}
 (S_3) &\Leftrightarrow \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3y - 7z = 1 \\ y - 2z = 1 \\ -3y + 2z = 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow L_2 \leftrightarrow L_3 \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y - 2z = 1 \\ 3y - 7z = 1 \\ -3y + 2z = 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \end{cases} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y - 2z = 1 \\ -z = -2 \\ -4z = 6 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y - 2z = 1 \\ -z = -2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_3 \end{cases} \begin{cases} 0 = 14 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Par conséquent (S_3) est incompatible.

2 Solutions obtenues :

- Pour (S_1) on obtient : $\{(2 + 2y, y, 18, 13), y \in \mathbb{R}\}$
- (S_2) est incompatible
- Pour (S_3) on obtient l'ensemble : $\{(-y, y, 1 - t, t), y, t \in \mathbb{R}\}$

3 Solutions obtenues (tous calculs faits)

$$a) \text{ On obtient } (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ -2y - 2z = -a + b \\ 0 = -a - 2b + c \end{cases}.$$

Par conséquent :

- Si $-a + 2b + c \neq 0$, alors (L_3) est impossible et (S_1) est incompatible.
- Si $-a + 2b + c = 0$ alors $(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ -2y - 2z = -a + b \end{cases}$ qui est compatible (et possède une infinité de solutions vu que z est arbitraire).

$$b) \text{ On obtient } (S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = b \\ -y + z = 2b + c \\ z = a - 2b \end{cases}.$$

Le système obtenu est triangulaire et possède une unique solution quelles que soient les valeurs de a, b, c : (S_2) est compatible sans condition sur a, b, c .

$$c) \text{ On obtient } (S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = b \\ 3y - 3z = 2a - 3b \\ 0 = -4a + 3b + 3c \end{cases}.$$

Ainsi (S_3) est compatible ssi $-4a + 3b + 3c = 0$.

$$d) \text{ On obtient } (S_4) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7z = d \\ y + 11z = b - 3d \\ 0 = -b + c - d \\ 0 = a - b + d \end{cases}.$$

Par conséquent (S_4) est compatible si et seulement si $-b + c - d = 0$ et $a - b + d = 0$.

4 • Résolution de (S_1) :

$$\begin{aligned}
 (S_1) &\iff \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \begin{cases} x - y + z = m \\ 6y - 6z = -4m \\ 2y - 2z = 3 - 3m \end{cases} \\
 &\iff L_2 \iff L_3 \begin{cases} x - y + z = m \\ 2y - 2z = 3 - 3m \\ 6y - 6z = -4m \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ 0 = 5m - 9 \end{cases} \begin{cases} x - y + z = m \\ 2y - 2z = 3 - 3m \\ 0 = 5m - 9 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi :

- Si $m \neq \frac{9}{5}$, alors (S_1) est incompatible
- Si $m = \frac{9}{5}$, on obtient $(S_1) \iff \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = z - \frac{6}{5} \end{cases}$ donc (S_1) a pour solutions les éléments de $\{(\frac{3}{5}, z - \frac{6}{5}, z), z \in \mathbb{R}\}$.
- L'échelonnement de (S_4) donne (après calculs) :

$$(S_4) \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3y + (m-2)z = 1 \\ -(m^2 + m - 12)z = 3 - m \end{cases}$$

Ainsi :

- Si $m^2 + m - 12 \neq 0$ i.e. si $m \notin \{3, -4\}$ il y a une unique solution que l'on obtient par remontée. Tous calculs faits on obtient :

$$x = \frac{3}{m+4} \quad y = -\frac{2}{m+4} \quad z = \frac{1}{m+4}$$
- Si $m = -4$ alors L_3 s'écrit $0 = 7$ ce qui est impossible donc (S_4) est incompatible.
- Si $m = 3$ on a

$$(S_4) \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3y + z = 1 \end{cases}$$

z est arbitraire et on obtient par remontée $y = \frac{z-1}{3}$ et $x = \frac{2-5z}{3}$. L'ensemble des solutions est donc

$$\begin{aligned}
 \left\{ \left(\frac{2-5z}{3}, \frac{z-1}{3}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\} &= \left\{ \left(\frac{2-5z}{3}, \frac{z-1}{3}, z \right), z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, 0 \right) + \text{Vect} \left(\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right) \right)
 \end{aligned}$$

- Résolution de (S_5) . On sait que (S_5) a une unique solution lorsque son déterminant est non nul. Or

$$\begin{vmatrix} m-1 & 3 \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)(m+1) - 3 = m^2 - 4$$

Donc, lorsque $m^2 - 4 \neq 0$ i.e. lorsque $m \notin \{-2, 2\}$, le système (S_5) a une unique solution (x_0, y_0) donnée par

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{\begin{vmatrix} 1+m+m^2 & 3 \\ -1 & m+1 \end{vmatrix}}{m^2-4} = \frac{m^3 + 2m^2 + 2m + 4}{m^2-4} = \frac{m^2+2}{m-2} \\
 y_0 &= \frac{\begin{vmatrix} m-1 & 1+m+m^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{m^2-4} = \frac{-2m-m^2}{m^2-4} = \frac{-m}{m-2}
 \end{aligned}$$

On distingue ensuite deux cas :

- Si $m = 2$, alors on a

$$(S_5) : \begin{cases} x + 3y = 7 \\ x + 3y = -1 \end{cases} \iff L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 0 = -8 \end{cases}$$

donc (S_5) est incompatible

- Si $m = -2$, alors on a

$$(S_5) : \begin{cases} -3x + 3y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Donc

$$(S_5) \iff x - y = -1 \iff \begin{cases} x = -1 + y \\ (y \text{ arbitraire}) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S_5) est donné par

$$\{(-1 + y, y), y \in \mathbb{R}\}$$

5 Tout se passe bien à condition de garder en tête que $\bar{\alpha}\alpha = |\alpha|^2$...

$$(S) \iff \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \bar{\alpha}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \bar{\alpha}^2L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + \alpha y + \alpha^2 z = 0 \\ (1 - |\alpha|^2)y + \alpha(1 - |\alpha|^2)z = 0 \\ \bar{\alpha}(1 - |\alpha|^2)y + (1 - |\alpha|^4)z = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - \bar{\alpha}L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + \alpha y + \alpha^2 z = 0 \\ (1 - |\alpha|^2)y + \alpha(1 - |\alpha|^2)z = 0 \\ (1 - |\alpha|^2)z = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi :

- Si $|\alpha|^2 = 1$ i.e. si $\alpha \in \mathbb{U}$, alors (S) équivaut à $x + \alpha y + \alpha^2 z = 0$ et a pour ensemble de solutions :

$$\{(-\alpha y - \alpha^2 z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$$
- Sinon (S) a pour unique solution le triplet $(0, 0, 0)$.