1 *On applique la méthode usuelle, ici on trouve une solution particulière par variation de la constante*

a) *Solution :* $t \mapsto \frac{3}{2}t - \frac{1}{2t}$

b) *Solutions :* $t \mapsto (t^2 - C)\ln t$

c) *Solution :* $t \mapsto \frac{t^2}{2(t+1)}$

d) *Solutions :* $t \mapsto Ct^{4/3} - t$.

e) *Solutions :* $t \mapsto \frac{C + \operatorname{Arctan} t}{t^2+1}$

f) *Faire une IPP pour primitiver dans la variation de la constante.*
Solutions : $t \mapsto \frac{C}{\operatorname{ch} t} + t - \operatorname{th} t$

2 *Ici on peut dans chaque cas trouver une solution particulière évidente donc inutile de faire varier la constante.*

a) *Solution :* $t \mapsto -1 + e^{-\frac{t^3}{3}}$.

b) *Solutions :* $t \mapsto 1 + Ce^{-\operatorname{Arcsin} t}$.

c) *Solution :* $t \mapsto 1 + 2e^t$.

d) *Solutions :* $t \mapsto Ct^{4/3} - t$.

3 **a)** *Utiliser les complexes ($\sin t = \operatorname{Im}(e^{it})$) pour primitiver dans la variation de la constante.*
Solution : $t \mapsto \frac{e^{-3t}}{10} + \frac{1}{10}(3\sin t - \cos t)$.

b) *Solutions* $t \mapsto Ce^t + \frac{t}{2}e^t + \frac{e^{-t}}{4}$.

c) *Utiliser les complexes pour primitiver dans la variation de la constante.*
Solutions : $t \mapsto Ce^{2t} + te^{2t} - \frac{e^t}{5}(\sin 2t + 2\cos 2t)$.

d) *Solution :* $t \mapsto -e^{-t} + \sin t$.

4 *N.B. On s'inspire de la preuve du théorème donnant les solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$. Si f vérifie $f' + af = 0$ on montre que la fonction $t \mapsto f(x)e^{A(x)}$ est constante. Ici il est donc naturel de considérer cette même fonction.*
Dériver $g : x \mapsto f(x)e^{A(x)}$. Grâce à l'hypothèse sur f, on montre de g est croissante, de plus $g(0) \geq 0$. On en déduit le signe de g, puis celui de f.

5 Par récurrence montrer que f_n est la fonction $t \mapsto \frac{(\ln t)^n}{n!}t^\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6 *Exercice corrigé en détail sur un fichier séparé*

7

- L'équation caractéristique a pour racines 1 et a.
Il convient donc de distinguer (à la fois pour la résolution de l'équation homogène que pour la solution particulière) les cas $a \neq 1$ (deux racines distinctes) et $a = 1$.
- *Solutions de l'équation homogène :*
  - Si $a \neq 1$: $t \mapsto Ae^t + Be^{at}$.
  - Si $a = 1$: $t \mapsto (At + B)e^t$
- *Solution particulière :* On a affaire à un second membre de la forme e^{mt} où $m = 1$ est racine (possiblement double) de l'équation caractéristique :
  - Si $a \neq 1$: on cherche une solution particulière y_1 sous la forme $y_1(t) = Cte^t$.
  On trouve $y_1 : t \mapsto \frac{1}{1-a}te^t$.
  - Si $a = 1$: on cherche une solution particulière y_1 sous la forme $y_1(t) = Ct^2e^t$.
  On trouve $y_1 : t \mapsto \frac{1}{2}t^2e^t$.
- *Solutions :*
  - Si $a \neq 1$: $t \mapsto Ae^t + Be^{at} + \frac{1}{1-a}te^t$
  - Si $a = 1$: $t \mapsto (At + B)e^t + \frac{1}{2}t^2e^t$

8

- *Solutions de l'équation homogène :* $t \mapsto e^{-t}(A\cos t + B\sin t)$.
- *Solution particulière.* On cherche une solution particulière $\widetilde{y}_1$ de l'équation complexe $y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+ia)t}$ puis on en prend la partie imaginaire.
Le second membre est de la forme e^{mt} où $m = -1 + ia$ peut être une racine de l'équation dans le cas où $a = \pm 1$.
  - Si $a \notin \{-1, 1\}$. On cherche $\widetilde{y}_1$ sous la forme $\widetilde{y}_1(t) = Ce^{(-1+ia)t}$, on trouve $C = \frac{1}{1-a^2}$.
  - Si $a = \pm 1$. On cherche $\widetilde{y}_1$ sous la forme $\widetilde{y}_1(t) = Cte^{(-1\pm i)t}$, on trouve $C = \frac{1}{\pm 2i} = \frac{\mp i}{2}$
- *Solutions :*
  - Si $a \notin \{-1, 1\}$: $t \mapsto e^{-t}(A\cos t + B\sin t) + \frac{1}{1-a^2}\sin(at)e^{-t}$
  - Si $a = \pm 1$: $t \mapsto e^{-t}(A\cos t + B\sin t) \mp \frac{\cos t}{2}te^{-t}$.

9

1. Calculer z' et z'' et identifier z'' dans l'équation.
Réponse : $z'' - 4z = 1$.

2. On résout l'équation différentielle sur z puis on revient à y *via* $y = \frac{z}{\operatorname{ch} t}$.
Solutions : $y : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} t}\left(Ae^{2t} + Be^{-2t} - \frac{1}{4}\right)$

10

1. a)

b) Prendre $t = e^x$ dans l'équation (E) et reconnaître z, z' et z'' : *Réponse :* $z'' - 2z' + z = 0$

2. On résout l'équation différentielle sur z puis on revient à y *via* : $y(t) = z(\ln t)$.
Solutions : $y : t \mapsto At\ln t + Bt$.

11 Evaluer (E) en $t = \sqrt{x}$ puis calculer $z'(x)$ et $z''(x)$ en fonction de $y'(\sqrt{x})$ et $y''(\sqrt{x})$. On obtient :

$$(E) \Leftrightarrow \forall x \geq \frac{\pi}{2}, \quad z''(x) + z(x) = 0 \quad \text{et} \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2a}$$

La solution de l'équation en z est $z : x \mapsto -\frac{1}{2a}\cos(x) + \sin(x)$.

La solution de (E) est $y : t \mapsto -\frac{1}{2a}\cos(t^2) + \sin(t^2)$

12 Par analyse-synthèse.
Dans l'étape d'analyse, fixer t et dériver par rapport à x puis prendre $x = 0$.
Solutions : Les fonctions f de la forme $f : t \mapsto at$

13 **1. a)** Pour montrer que φ est constante, dériver φ en utilisant l'équation vérifiée par f (à la fois en t et aussi en $\frac{1}{t}$).

b) La question a) permet d'écrire $f(\frac{1}{t}) = \omega^2 \times \frac{1}{f(t)}$.
Remplacer alors $f(\frac{1}{t})$ dans l'équation vérifiée par f.
On obtient : $f'(t) - \frac{1}{\omega^2 t} f(t) = 0$.
Solution : $f(t) = Ct^{1/\omega^2}$.

2. D'après la question 1, les candidats solutions sont nécessairement de la forme $f : t \mapsto Ct^{1/\omega^2}$.
On peut montrer que $\omega^2 = C^2$ en évaluant l'équation vérifiée par f.
Reste ensuite à tester les candidats.

14 Par analyse-synthèse.
Dans l'étape d'analyse, fixer t et dériver par rapport à x puis prendre $x = 0$.
On trouve que f vérifie une equa. diff. de la forme $y' - y = ke^t$ pour une certaine constante k $(k = f'(0)$ mais c'est sans importance).
Reste à résoudre l'équation différentielle, on peut ensuite évaluer l'équation en $x = t = 0$ pour obtenir la valeur de $f(0)$ et ainsi avoir une expression de f en fonction d'une seule constante.
Ne pas oublier ensuite l'étape de synthèse.
Solutions : Les fonctions f de la forme $f : t \mapsto kte^t$

15 Par analyse-synthèse.
Dans l'étape d'analyse, dériver l'équation vérifiée par f. On trouve que f vérifie une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants, qui permet d'en déduire une expression pour $f(t)$ en fonction de deux constantes A et B.
Utiliser la condition initiale pour éliminer une constante.
Ne pas oublier ensuite l'étape de synthèse.
Solutions : $f = \mathrm{sh}$.

16 Par analyse-synthèse.
Dans l'étape d'analyse, dériver deux fois l'équation.
On trouve que f est solution de : $y'' + y = 0$.
On en déduit une expression de f en fonction de deux constantes : $f : x \mapsto A\cos x + B\sin x$.
En évaluant l'équation de départ on peut exprimer A en fonction de B, on trouve A en fonction de B.
Remplacer A dans l'expression de f puis poser $C = \frac{B}{\cos 2}$ pour obtenir l'expression de l'énoncé.
Ne pas oublier ensuite l'étape de synthèse.

17 Par analyse-synthèse.
Dans l'étape d'analyse, chercher f sous la forme $f = g + h$ où g est paire et h impaire.
En isolant les parties paires et impaires de $t \mapsto f''(t) + f(-t)$ on trouve que g vérifie $g''(t) + g(t) = 0$ et $h''(t) - h(t) = t$.
On en déduit des expressions pour $g(t)$ et $h(t)$.
Utiliser la parité de g et l'imparité de h pour éliminer des constantes.
Reste ensuite à tester les candidats solutions $f = g + h$ trouvés.
Solutions : Les fonctions f de la forme $t \mapsto A\cos t + C\,\mathrm{sh}\, t - t$.

18 Par analyse-synthèse.
Dans l'étape d'analyse, dériver l'équation.
On trouve que f vérifie l'équation : $f'' + \frac{1}{t^2} f = 0$.

Attention : pas d'équation caractéristique ici, l'équation n'est pas à coefficients constants.
Suivre l'indication de l'énoncé en posant $g(x) = f(e^x)$.
En calculant $g'(x)$ puis $g''(x)$ puis en prenant $t = e^x$ dans l'équation différentielle de f on constate que $g'' - g' + g = 0$.
En résolvant l'équation différentielle vérifiée par g puis en utilisant $g'(0) = g(0)$ pour obtient que g est de la forme $x \mapsto Ce^{x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$.
On revient à f via $f(t) = g(\ln t)$.
Ne pas oublier ensuite l'étape de synthèse.
Solutions : Les fonctions $f : t \mapsto C\sqrt{t}\, \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t - \frac{\pi}{6}\right)$

19 Par analyse-synthèse.
Dans l'étape d'analyse, dériver deux fois l'équation.
Attention, on ne dispose pas de théorème permettant de dériver $x \mapsto \int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t$ (note [1]). Pour pouvoir dériver, commencer par effectuer le changement de variable $u = x - t$ dans l'intégrale. On trouve que f est solution de : $y'' - y = 2$.
On en déduit une expression de f en fonction de deux constantes.En évaluant l'équation de départ en 0 ainsi que l'égalité trouvée sur f' en (obtenue après avoir dérivé l'équation), on obtient $f(0) = f'(0) = 0$.
On trouve que le seul candidat solution est $x \mapsto 2(\mathrm{ch}\, x - 1)$.
Ne pas oublier ensuite l'étape de synthèse : il s'agit de calculer $\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t$ lorsque $f(x) = 2(\mathrm{ch}\, x - 1)$ et de vérifier que cette intégrale vaut bien $2(\mathrm{ch}\, x - 1)$.

20 **1.** Calculer H' et utiliser l'hypothèse de majoration sur f pour montrer que $H' - aH \le ab$. Le résultat demandé en découle en prenant $\varphi = (H' - aH) - ab$.

2. Par hypothèse : $f \le b + H$ donc il suffit de montrer que $H(x) \le e^{A(x)} \int_0^x a(t)b(t)e^{-A(t)}\,\mathrm{d}t$.
Pour obtenir cette majoration, déterminer une expression de $H(x)$ en résolvant l'équation différentielle de la première question. On trouve : $H(x) = Ce^{A(x)} + \lambda(x)e^{A(x)}$ où λ vérifie $\lambda'(x) = e^{-A(x)}(a(x)b(x) + \varphi(x))$ pour tout $x \ge 0$.
On peut prendre $\lambda(x) = \int_0^x e^{-A(t)}(a(t)b(t) + \varphi(t))\,\mathrm{d}t$
Il suffit de :
- Déterminer C en calculant $H(0)$
- Majorer λ en utilisant : $\varphi \le 0$.

21 **1.** On peut exploiter la propriété d'unicité des solution du problème de Cauchy associé à (E).

2.

1. « à cause » de la présence du x dans l'intégrale