Equations du premier ordre

1 SF 1 Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles indiqués

a) $ty' - y = \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec : $y(1) = 1$.

b) $ty' \ln t - y = 2t^2(\ln t)^2$, sur $]0,1[$.

c) $(t+1)y' + y - t = 0$, sur $]-1,+\infty[$, avec : $y(0) = 0$.

d) $3ty' - 4y = t$, sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) $(t^2+1)^2 y' + 2t(t^2+1)y = 1$, sur $\mathbb{R}$.

f) $y' + (\operatorname{th} t)y = t \operatorname{th} t$, sur $\mathbb{R}$.

2 SF 1 Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles indiqués

a) $y' + t^2 y + t^2 = 0$, sur $\mathbb{R}$, avec : $y(0) = 0$.

b) $\sqrt{1-t^2}\, y' + y = 1$ sur $]-1,1[$.

c) $(1+e^{-t})y' - y = 1$ sur $\mathbb{R}$, avec : $y(0) = 3$.

3 SF 1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a) $y' + 3y = \sin t$, avec : $y(0) = 0$.

b) $y' - y = \operatorname{sh} t$.

c) $y' - 2y = e^{2t} + e^t \sin 2t$.

d) $y' + y = \cos t + \sin t$, avec : $y(0) = -1$.

4 Soit $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dérivable telle que : $f(0) \geq 0$ et pour tout $x \geq 0$: $f'(x) + a(x)f(x) \geq 0$.
Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$: $f(x) \geq 0$.

5 SF 1 On note f_0 la fonction $t \mapsto t^\alpha$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note f_{n+1} l'unique solution de l'équation différentielle : $ty' - \alpha y = f_n(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec : $f_{n+1}(1) = 0$.
Calculer f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Equations du second ordre

6 SF 2 SF 3 SF 4 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a) $y'' + y' - 2y = 10 \sin t$, avec : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

b) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t} + 4$, avec : $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$.

c) $y'' - y = 8e^x \cos(2x)$

d) $y'' + 2y' + y = \operatorname{sh} x$

e) $y'' + y = 2\sin^2 t$

f) $y'' + 2y' + 10y = (\cos 3t)e^{-t}$

g) $y'' - 7y' + 10y = 13 \sin t$

h) $y'' + 4y = 4\cos(2t)$, avec : $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$

i) $y'' + 4y' + 4y = 2 \operatorname{ch} 2t$

7 SF 2 SF 3 Résoudre sur $\mathbb{R}$ en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' - (1+a)y' + ay = e^t$.

8 SF 2 SF 4 Résoudre sur $\mathbb{R}$ en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = \sin(at)e^{-t}$.

9 SF 2 On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :
(E) $(\operatorname{ch} t)y'' + 2(\operatorname{sh} t)y' - 3(\operatorname{ch} t)y = 1$.

1. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z : t \mapsto (\operatorname{ch} t)y(t)$ est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre.
2. En déduire toutes les solutions de (E).

10 SF 2 On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :
(E) $t^2 y''(t) - ty'(t) + y(t) = 0$.

1. Etant donnée une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ on pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $z(x) = y(e^x)$.
   a) Calculer $z'(x)$ et $z''(x)$.
   b) Montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants que l'on déterminera.
2. En déduire les solutions de (E).

11 SF 2 On pose $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On note (E) l'équation différentielle $ty''(t) - y'(t) + 4t^3 y(t) = 0$ sur $[a,+\infty[$, avec : $y(a) = y'(a) = 1$
Résoudre (E) en « posant » $t = \sqrt{x}$ *i.e.* en effectuant le changement de fonction inconnue $z(x) = y(\sqrt{x})$.

Equations fonctionnelles

12 SF 5 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, vérifiant : $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, $f(t+x) = f(t) + f(x)$.

13 SF 5 On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dérivables, vérifiant $(\star)$: $\forall t > 0$, $f'(t) f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}$.

1. On suppose dans cette question que $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est dérivable et vérifie $(\star)$.
   a) Montrer que $\varphi : t \mapsto f(t) f\left(\frac{1}{t}\right)$ est constante et strictement positive. On note ω^2 cette constante.
   b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et en déduire une expression de f en fonction de ω et d'une autre constante.
2. Montrer que les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto C t^{\frac{1}{C^2}}$ avec $C \in \mathbb{R}^*$.

14 SF 5 SF 1 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, vérifiant : $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$, $f(t+x) = e^x f(t) + e^t f(x)$.

15 SF 5 SF 2 Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t)^2 - f(t)^2 = 1$ et $f'(0) = 1$

16 SF 5 SF 2 Montrer que les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = f(2-x)$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto C\big(\cos x + \sin(x-2)\big)$, avec $C \in \mathbb{R}$

17 SF 5 SF 2 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f''(t) + f(-t) = t$.

18 SF 5 SF 2 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dérivables et telles que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.
Indication : Montrer qu'une telle fonction f vérifie une équation différentielle du second ordre puis résoudre l'équation obtenue à l'aide du changement de fonction inconnue $g(x) = f(e^x)$.

19 SF 5 SF 2 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^2 + \int_0^x t f(x-t)\,dt$.

Expression intégrale des solutions

20 SF 5 SF 1 Soient f, a et b trois fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction a est positive et on note A une primitive de a sur $\mathbb{R}_+$. On suppose enfin que pour tout $x \geq 0$: $\quad 0 \leq f(x) \leq b(x) + \int_0^x a(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction $H : x \mapsto \int_0^x a(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ vérifie une équation différentielle de la forme : $H' - aH = ab + \varphi$, où φ est une fonction continue et négative sur $\mathbb{R}_+$.

2. En déduire : $\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq b(x) + e^{A(x)} \int_0^x a(t)b(t)e^{-A(t)}\,\mathrm{d}t$

21 SF 5 SF 1 Soient a et b deux fonctions continues et T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour un certain $T > 0$. On s'intéresse à l'existence de solutions T-périodiques de l'équation différentielle $\quad (E) : \quad y' + a(t)y = b(t)$.

1. Montrer que toute solution y de (E) est T-périodique si et seulement si : $\quad y(T) = y(0)$.

2. On pose $m = \dfrac{1}{T}\int_0^T a(t)\,\mathrm{d}t$.

a) On suppose que $m \neq 0$. Montrer que (E) possède une unique solution T-périodique.

b) On suppose que $m = 0$. Montrer qu'ou bien toute solution de (E) est T-périodique, ou bien aucune ne l'est.