6 **a)** L'équation caractéristique : $(\mathscr{C})\quad \lambda^2+\lambda-2=0.$ a deux racines réelles : -2 et 1.

- Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions : $y_0 : t \mapsto Ae^{-2t}+Be^{t}$
- Une solution particulière est $y_1=\mathrm{Im}(\tilde{y}_1)$ où $\tilde{y}_1$ est solution (complexe) de l'équation $y''+y'-2y=10e^{it}$. Cherchant $\tilde{y}_1$ sous la forme $\tilde{y}_1(t)=Ce^{it}$, on obtient $\tilde{y}_1'(t)-iCe^{it}$ et $\tilde{y}_1''(t)=-Ce^{it}$ donc
$$\tilde{y}_1''(t)+\tilde{y}_1(t)-2\tilde{y}_1(t)=(-3+i)Ce^{it}$$
de sorte que $\tilde{y}_1$ est solution à condition de poser $C=\dfrac{10}{-3+i}=-3-i$.
On obtient $y_1(t)=\mathrm{Im}((-3-i)e^{it})=-3\sin t-\cos t$.
- les solutions de l'équations sont les fonctions de la forme $y : t\mapsto Ae^{-2t}+Be^{t}-\cos t-3\sin t$, où $A,B\in\mathbb{R}$ sont des constantes quelconques.
Ici, les conditions $y(0)=0$ et $y'(0)=1$ imposent $\begin{cases}A+B-1=0\\-2A+B-3=1\end{cases}$ *i.e.* $\begin{cases}A+B=1\\-2A+B=4\end{cases}$ d'où l'on tire $A=-1$ et $B=2$
donc la solution cherchée est $\boxed{y : t\mapsto -e^{-2t}+2e^{t}-\cos t-3\sin t}$

b) L'équation caractéristique s'écrit : $(\mathscr{C})\quad \lambda^2-4\lambda+4=0.$ Cette équation admet 2 pour racine double.

- Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions : $y_0 : t\mapsto (At+B)e^{2t}$
- On cherche une solution particulière grâce au principe de superposition :
  - Une solution particulière y_1 de l'équation $y''-4y'+4y=4$ est la fonction constante $y_1=1$.
  - Cherchons une solution particulière y_2 de l'équation $y''-4y'+4y=2e^{2t}$. Le second membre étant de la forme $2e^{rt}$ où $r=2$ est racine double de $(\mathscr{C})$ on cherche y_2 sous la forme $y_2(t)=Ct^2e^{2t}$. On a alors
  $$y_2'(t)=2Ct^2e^{2t}+2Cte^{2t}\qquad y_2''(t)=4Ct^2e^{2t}+8Cte^{2t}+2Ce^{2t}\quad\text{d'où}\quad y_2''(t)-4y_2'(t)+4y_2(t)=2Ce^{2t}.$$
  Ainsi y_2 est solution si $2C=2$, ce qui donne $C=1$ et $y_2 : t\mapsto t^2e^{2t}$.
- Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme
$$y : t\mapsto (At+B)e^{2t}+y_1(t)+y_2(t)=(At+B)e^{2t}+1+t^2e^{2t}$$
- Ici, les conditions $y(0)=4$ et $y'(0)=0$ imposent $\begin{cases}B+1=4\\A+2B=0\end{cases}$ d'où l'on tire $B=3$ et $A=-6$ donc la solution cherchée est $\boxed{y : t\mapsto (-6t+3)e^{2t}+1+t^2e^{2t}=(t^2-6t+3)e^{2t}+1}$.

c) L'équation caractéristique s'écrit : $(\mathscr{C})\quad \lambda^2-1=0.$ Cette équation a deux racines réelles : 1 et -1.

- Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions : $y_0 : x\mapsto Ae^{x}+Be^{-x}$
- Une solution particulière est donnée par $y_1=\mathrm{Re}(\tilde{y}_1)$ où $\tilde{y}_1$ est solution (complexe) de l'équation $y''-y=8e^{x}e^{2ix}=8e^{(1+2i)x}$. Cherchant $\tilde{y}_1$ sous la forme $\tilde{y}_1(x)=Ce^{(1+2i)x}$, on obtient :
$$\tilde{y}_1''(x)=C(1+2i)^2e^{(1+2i)x}=C(-3+4i)e^{(1+2i)x}\quad\text{puis}\quad \tilde{y}_1''(x)-\tilde{y}_1(x)=4C(-1+i)e^{(1+2i)x}$$
de sorte que $\tilde{y}_1$ est solution à condition de poser $C=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{-1+i}\times 8=(-1-i)$.
On obtient $y_1(x)=e^{x}\,\mathrm{Re}((-1-i)e^{2ix})=e^{x}(-\cos(2x)+\sin(2x))$.
- Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme $\boxed{y : x\mapsto Ae^{x}+Be^{-x}+e^{x}(-\cos(2x)+\sin(2x))}$

d) L'équation caractéristique s'écrit : $(\mathscr{C})\quad \lambda^2+2\lambda+1=0.$ Cette équation admet -1 pour racine double.

- Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions : $y_0 : x\mapsto (Ax+B)e^{-x}$
- Le second membre s'écrit $\mathrm{sh}\,x=\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}$. On cherche une solution particulière grâce au principe de superposition :
  - Cherchons une solution particulière y_1 de l'équation $y''+2y'+y=e^{x}$. On cherche y_1 sous la forme $y_1(x)=Ce^{x}$. On a alors $y_1''(x)+2y_1'(x)+y_1(x)=4Ce^{x}$. Ainsi y_1 est solution si $C=\dfrac{1}{4}$ et $y_1 : x\mapsto \dfrac{1}{4}e^{x}$.
  - Cherchons une solution particulière y_2 de l'équation $y''+2y'+y=e^{-x}$. Puisque On cherche y_2 sous la forme $y_2(x)=Ct^2e^{-x}$. On obtient alors, tous calculs faits $y_2''(x)+2y_2'(x)+y_2(x)=2Ce^{-x}$. Ainsi y_2 est solution si $C=\dfrac{1}{2}$ et $y_2 : x\mapsto \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$.
- Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $\boxed{y : x\mapsto (Ax+B)e^{-x}+\dfrac{1}{2}y_1(x)-\dfrac{1}{2}y_2(x)=(Ax+B)e^{-x}+\dfrac{e^{x}}{8}-\dfrac{x^2e^{-x}}{4}}$

e) L'équation caractéristique s'écrit : $(\mathscr{C})\quad \lambda^2+1=0.$ Cette équation admet pour racines i et $-i$.

- Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions : $y_0 : t\mapsto A\cos t+B\sin t$
- Le second membre s'écrit $2\sin^2 t=1-\cos(2t)$.
On cherche une solution particulière grâce au principe de superposition :

- Une solution particulière de l'équation $y''+y=1$ est la fonction constante $y_1=1$.
- Une solution particulière de $y''+y=\cos(2t)$ est donnée par $y_2=\mathrm{Re}(\tilde{y}_2)$ où $\tilde{y}_2$ est solution (complexe) de l'équation $y''+y=e^{2it}$. Cherchant $\tilde{y}_2$ sous la forme $\tilde{y}_2(t)=Ce^{2it}$, on obtient
$$\tilde{y}_2''(t)+\tilde{y}_2=-3Ce^{2it}$$
de sorte que $\tilde{y}_2$ est solution à condition de prendre $C=-\dfrac{1}{3}$. On obtient $y_2(t)=-\dfrac{1}{3}\cos(2t)$.

- Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $y:t\mapsto A\cos t+B\sin t+y_1(t)-y_2(t)$ *i.e.* $\boxed{y:t\mapsto A\cos t+B\sin t+1+\frac{1}{3}\cos(2t)}$

f) L'équation caractéristique s'écrit : $(\mathscr{C})\quad \lambda^2+2\lambda+10=0$. Elle a deux racines complexes conjuguées $-1+3i$ et $-1-3i$.
- Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions : $y_0:t\mapsto e^{-t}(A\cos 3t+B\sin 3t)$
- Une solution particulière est donnée par $y_1=\mathrm{Re}(\tilde{y}_1)$ où $\tilde{y}_1$ est solution (complexe) de l'équation
$$y''+2y'+10y=e^{3it}e^{-t}=e^{(-1+3i)t}$$
Puisque $-1+3i$ est racine de $(\mathscr{C})$, on cherche $\tilde{y}_1$ sous la forme $\tilde{y}_1(t)=Cte^{(-1+3i)t}$, on obtient :
$$\tilde{y}_1'(t)=Ce^{(-1+3i)t}+C(-1+3i)te^{(-1+3i)t}\qquad\text{et}\qquad \tilde{y}_1''(t)=2C(-1+3i)e^{(-1+3i)t}+Ct(-8-6i)e^{(-1+3i)t}$$
et donc : $\tilde{y}_1''(t)+2\tilde{y}_1(t)+10\tilde{y}_1(t)=6iCe^{(-1+3i)t}$ de sorte que $\tilde{y}_1$ est solution à condition de poser $C=\dfrac{1}{6i}=\dfrac{-i}{6}$.
On obtient $\tilde{y}_1(t)=-\dfrac{i}{6}te^{-t}e^{3it}$ et $y_1(t)=\dfrac{t}{6}e^{-t}\sin(3t)$.
- Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $\boxed{y:t\mapsto e^{-t}(A\cos 3t+B\sin 3t)+\frac{t}{6}e^{-t}\sin(3t)}$ où $A,B\in\mathbb{R}$ sont des constantes quelconques.

g) L'équation caractéristique s'écrit : $(\mathscr{C})$ $\lambda^2-7\lambda+10=0$, et a pour racines 2 et 5.
- Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $y_0:t\mapsto Ae^{2t}+Be^{5t}$ où $A,B\in\mathbb{R}$ sont des constantes quelconques.
- Une solution particulière est donnée par $y_1=\mathrm{Im}(\tilde{y}_1)$, où $\tilde{y}_1$ est solution de $y''-7y'+10y=13e^{\,it}$.
Cherchant $\tilde{y}_1$ sous la forme $\tilde{y}_1=Ce^{it}$, on obtient $\tilde{y}_1''-7\tilde{y}_1'+10\tilde{y}_1=(9-7i)Ce^{2it}$ de sorte que $\tilde{y}_1$ est solution à condition de poser $C=\dfrac{13}{9-7i}=\dfrac{1}{10}(9+7i)$. On obtient donc $y_1=\dfrac{1}{10}\mathrm{Im}((9+7i)e^{it})=\dfrac{1}{10}(7\cos t+9\sin t)$.
- Les solutions de l'équation sont donc finalement les fonctions de la forme $\boxed{y:t\mapsto Ae^{2t}+Be^{5t}+\frac{1}{10}(7\cos t+9\sin t)}$ où $A,B\in\mathbb{R}$ sont des constantes quelconques.

h) L'équation caractéristique s'écrit : $(\mathscr{C})$ $\lambda^2+4=0$, dont $2i$ est racine double.
- Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $y_0:t\mapsto A\cos(2t)+B\sin(2t)$ où $A,B\in\mathbb{R}$ sont des constantes quelconques.
- Une solution particulière est donnée par $y_1=\mathrm{Re}(\tilde{y}_1)$, où $\tilde{y}_1$ est solution complexe de l'équation $y''+4y=4e^{\,2it}$.
Cherchant $\tilde{y}_1$ sous la forme $\tilde{y}_1=Cte^{2it}$, on obtient $\tilde{y}_1''+4\tilde{y}_1=4iCe^{2it}$ de sorte que $\tilde{y}_1$ est solution à condition de poser $C=\dfrac{4}{4i}=-i$. On obtient donc $y_1:t\mapsto t\,\mathrm{Re}(-ie^{2it})=t\sin(2t)$
- On sait que la solution y recherchée est de la forme $y(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t)+t\sin(2t)$.
  - On constate que $y(0)=A$. Ainsi la condition $y(0)=4$ donne $A=4$.
  - On constate ensuite que $y'(0)=2B$ et la condition $y'(0)=0$ donne alors $B=0$.

La solution du problème de Cauchy est donc la fonction : $\boxed{y:t\mapsto 4\cos(2t)+t\sin(2t)}$

i) L'équation caractéristique s'écrit : $(\mathscr{C})$ $\lambda^2+4\lambda+4=0$, et -2 est racine double.
- Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $y_0:t\mapsto(A+Bt)e^{-2t}$ où $A,B\in\mathbb{R}$ sont des constantes quelconques.
- Le second membre vérifie : $2\operatorname{ch}t=e^{2t}-e^{2t}$.
Par principe de superposition,une solution particulière y_1 de l'équation est donnée par $y_1=y_2+y_3$ où :
$$y_2 \text{ est une solution particulière de } y''+4y'+4y=e^{2t}$$
$$y_3 \text{ est une solution particulière de } y''+4y'+4y=e^{-2t}$$
Cherchant y_2 sous la forme $y_2=Ce^{2t}$, on obtient $y_2''+4y_2'+4y_2=16e^{2t}$ d'où, par identification, $C=\frac{1}{16}$.
Cherchant y_3 sous la forme $y_3=Ct^2e^{-2t}$ on obtient, tous calculs faits, $y_3''+4y_3'+4y_3=2Ce^{-2t}$ d'où $C=\frac{1}{2}$.
Une solution particulière de l'équation de départ est donc $y_1:t\mapsto\dfrac{1}{16}e^{2t}+\dfrac{1}{2}t^2e^{-2t}$
- Les solutions de l'équation sont donc finalement les fonctions de la forme $\boxed{t\mapsto\left(A+Bt+\frac{t^2}{2}\right)e^{-2t}+\frac{1}{16}e^{2t}}$ où $A,B\in\mathbb{R}$ sont des constantes quelconques.