Méthodes directes

1 ★★★ SF 3 Déterminer une primitive des fonctions :

a) $t \mapsto 2t(3t^2-1)^3$ **b)** $t \mapsto te^{-3t^2}$

c) $t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^4}$ **d)** $t \mapsto (6t^2+8)\sin(t^3+4t)$

e) $t \mapsto \dfrac{t^3}{1+t^4}$ **f)** $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{th} t}$

g) $t \mapsto \tan^2 t$ **h)** $t \mapsto \dfrac{e^{1/t}}{t^2}$

i) $t \mapsto \dfrac{1}{t+t(\ln t)^2}$ **j)** $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(t)}\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2(t)}}$

k) $t \mapsto \sqrt{5t+4}$ **l)** $t \mapsto \dfrac{1}{t+\sqrt{t}}$

2 ★★★ SF 4 Calculer une primitive de :
a) $t \mapsto \cos(2t)\sin^3(3t)$ **b)** $t \mapsto \operatorname{ch}^4(t)$

3 ★★★ SF 6 SF 7 SF 8 Calculer une primitive des fonctions :

a) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3x+4}$ **b)** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+4}$ **c)** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-6x+8}$

d) $x \mapsto \dfrac{3+4x}{x^2+4}$ **e)** ★★★ $x \mapsto \dfrac{3x+2}{2x^2-4x+3}$

4 ★★★ SF 3 Calculer une primitive sur $]-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}[$ des fonctions

$$f : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$$

Indication : On pourra primitiver $f+g$ et $f-g$.

5 ★★★ SF 5 En utilisant les nombres complexes, déterminer une primitive de $t \mapsto 2e^t \sin^2 t$.

6 ★★★ Etant donné $\omega = a+ib \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, calculer une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-\omega}$.

Primitives et intégrales

7 ★★★ SF 1 Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

8 ★★★ SF 1 Soient I un intervalle et $a \in I$.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ qui ne s'annule pas.
Montrer qu'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que : $f = f(a)e^g$.

9 ★★★★ SF 1 SF 10 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue.
On suppose que $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ pour un certain $\ell \in [0,1[$.
On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que la suite $\big(F(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

Intégration par parties

10 ★★★ SF 1 SF 9 A l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties, déterminer une primitive des fonctions :

a) $x \mapsto x \operatorname{sh} x$ **b)** $x \mapsto x \operatorname{Arctan} x$ **c)** $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$

d) $x \mapsto x^2 e^x$ **e)** $x \mapsto x^3 \ln x$ **f)** $x \mapsto \operatorname{sh} x \sin x$

g) $x \mapsto \ln(1+x^2)$ **h)** $x \mapsto x(\ln x)^2$ **i)** $x \mapsto x^3 e^{x^2}$

j) $x \mapsto x\sin^2 x$ **k)** $x \mapsto e^{\operatorname{Arcsin} x}$

l) $x \mapsto x^2\cos x$ et $x \mapsto x^2 \sin x$

11 ★★★ SF 1 SF 5 SF 9 On utilisant les nombres complexes, calculer une primitive de $t \mapsto te^t \sin t$.

12 ★★★ SF 1 SF 9 A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^4 x}$.

Changement de variable

13 ★★★ SF 1 SF 10 SF 11 Déterminer une primitive de chacune des fonctions à l'aide des changements de variables proposés

a) $t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{e^t+1}$ (poser $u = e^t$)

b) $\theta \mapsto \sin 2\theta\sqrt{\cos\theta}$ (poser $t = \cos\theta$)

c) $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ (poser $u = \operatorname{sh} t$)

d) $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ (poser $t = s^2$)

e) $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$(« poser » $u = \sqrt{1+t}$ *i.e.* $t = \ldots$)

f) $t \mapsto \sqrt{e^t-1}$ (« poser » $s = \sqrt{e^t-1}$ *i.e.* $t = \ldots$)

g) $t \mapsto t\sqrt{1-t^2}$ (poser $t = \sin\theta$)

h) $t \mapsto \dfrac{1}{t(t+1)}\ln\left(\dfrac{t}{t+1}\right)$ (poser $s = \dfrac{t}{t+1}$)

i) $\theta \mapsto \tan^3\theta$ (poser $t = \cos\theta$)

j) $t \mapsto \sqrt{1+\sqrt{t}}$ (poser $u = \sqrt{1+\sqrt{t}}$ *i.e.* $t = \ldots$)

k) $\theta \mapsto \dfrac{1}{2+\sin\theta+\cos\theta}$ sur $]-\pi,\pi[$ (poser $t = \tan\frac{\theta}{2}$)

14 ★★★ SF 1 SF 10 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{d\theta}{3+\cos^2\theta}$.

1. a) Pour $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, calculer $F(x)$ (poser $t = \tan\theta$).

b) En déduire : $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $F\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

2. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe une constante $C_k \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = F(x-k\pi)+C_k$.

b) Calculer C_k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

c) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, une expression de $F(x)$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}+k\pi,-\frac{\pi}{2}+k\pi[$.

15 SF 1 SF 10 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On note f la fonction $\theta \mapsto \alpha\cos\theta + \sin\theta + 2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f ne s'annule pas ssi $|\alpha| < \sqrt{3}$.

2. On suppose que $|\alpha| < \sqrt{3}$ et on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{f(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Soit $x \in]-\pi, \pi[$. En posant $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$, calculer $F(x)$ en fonction de la constante $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{3-\alpha^2}}$.

b) En déduire : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = 2\omega\pi$

16 SF 10 SF 11 Calculer les intégrales suivantes à l'aide des changements de variables proposés :

a) $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$, (poser $x = \cos\theta$).

b) $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t+1}\,\mathrm{d}t$ (poser $x = e^t$).

c) $K = \displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ (poser $t = \sin\theta$).

17 SF 11 Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t$ en effectuant un changement de variable affine échangeant ses bornes

18 SF 10 SF 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x+t)\cos t\,\mathrm{d}t$ est dérivable et calculer sa dérivée

19 SF 1 SF 9 SF 10 En combinant éventuellement intégration par partie et changement de variable, déterminer une primitive des fonctions suivantes :

a) $t \mapsto \operatorname{ch} t \ln(\operatorname{ch} t)$. **b)** $t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}$