1 On primitive à vue en reconnaissant $u' \times f \circ u$.

a) On reconnaît $u'u^3$. *Une primitive :* $t \mapsto \frac{1}{12}(3t^2-1)^4$.

b) On reconnaît $u'e^u$. *Une primitive :* $t \mapsto \frac{-1}{6}e^{-3t^2}$.

c) On reconnaît $u'u^{-4}$. *Une primitive :* $t \mapsto \frac{-1}{3}\frac{1}{(\ln t)^3}$.

d) On reconnaît $u'\sin u$. *Une primitive :* $t \mapsto -2\cos(t^3+4t)$.

e) On reconnaît $\frac{u'}{u}$. *Une primitive :* $t \mapsto \frac{1}{4}\ln(1+t^4)$.

f) On reconnaît $\frac{u'}{u}$. *Une primitive :* $t \mapsto \ln|\operatorname{sh} t|$.

g) Penser à $\tan' = 1+\tan^2$. *Une primitive :* $t \mapsto \tan t - t$.

h) On reconnaît $u'e^u$. *Une primitive :* $t \mapsto -e^{1/t}$.

i) On reconnaît $\frac{u'}{1+u^2}$. *Une primitive :* $t \mapsto \operatorname{Arctan}\ln t$.

j) On reconnaît $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$. *Une primitive :* $t \mapsto \operatorname{Arcsin}\operatorname{th} t$.

k) On reconnaît $u'u^{1/2}$. *Une primitive :* $t \mapsto \frac{2}{15}(5t+4)^{3/2}$.

l) On reconnaît $\frac{u'}{u}$. *Une primitive :* $t \mapsto 2\ln(1+\sqrt{t})$.

2 On linéarise puis on primitive les morceaux.

a) *Une primitive :*

$$t \mapsto \frac{1}{8}\Big(-3\cos t - \frac{3}{5}\cos 5t + \frac{1}{7}\cos 7t + \frac{1}{11}\cos 11t\Big)$$

b) *Une primitive :* $t \mapsto \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{4}\operatorname{sh} 4t + 2\operatorname{sh} 2t + 3t\Big)$.

3

a) Avec SF 8 *Une primitive :* $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{Arctan}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}$

b) Avec SF 7 *Une primitive :* $x \mapsto -\frac{1}{x+2}$

c) Avec SF 6 *Une primitive :* $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|$

d) Séparer en deux fractions.
Une primitive : $x \mapsto \frac{3}{2}\operatorname{Arctan}\frac{x}{2} + 2\ln(x^2+4)$.

e) Faire apparaître la forme $\frac{u'}{u}$ *i.e.* faire apparaître $4x-4$ au numérateur :

$$\frac{3x+2}{2x^2-4x+3} = \frac{3}{4}\frac{4x+\frac{8}{3}}{2x^2-4x+3} = \frac{3}{4}\frac{4x+4}{2x^2-4x+3} + 5\frac{1}{2x^2+4x+3}$$

Primitiver ensuite séparément les deux morceaux.
Une primitive :

$$x \mapsto \frac{3}{4}\ln(2x^2-4x+3) + \frac{5\sqrt{2}}{2}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}(x-1))$$

4 Poser $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ et $G : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ puis calculer $F(x)+G(x)$ (facile) et $F(x)-G(x)$ (reconnaître $\frac{u'}{u}$).
On en déduit $F(x)$ et $G(x)$ en résolvant le système obtenu sur $F(x)+G(x)$ et $F(x)-G(x)$.
Réponse : $F(x) = \frac{1}{2}(x+\ln(\cos x+\sin x)$ et $G(x) = \frac{1}{2}(x-\ln(\cos x+\sin x)$

5 Utiliser $2\sin^2 t = 1-\cos(2t)$ puis primitiver en utilisant la méthode du cours SF 5
Une primitive : $t \mapsto e^t - \frac{e^t}{5}(\cos 2t + 2\sin 2t)$

6 *Attention de ne pas primitiver directement avec un log, ici on a affaire à des nombres complexes.*
Ecrire $\frac{1}{t-\omega}$ sous forme algébrique (conjugué du dénominateur ...) puis primitiver partie réelle et imaginaire.
Une primitive : $t \mapsto \ln|x-\omega| + i\operatorname{Arctan}\big(\frac{x-a}{b}\big)$.

7 Montrer que $f : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ et $g : x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ vérifient $f' = g'$ et que f et g coïncident en un point.

8 La fonction $g : x \mapsto \int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt$ convient.

9

10 *N.B. primitiver la fonction f par intégration par parties est possible après avoir appliqué le théorème fondamental de l'analyse : une primitive sur chaque intervalle I où f est continue est $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ (a est à choisir dans I). On fait alors une intégration par parties à x fixé dans l'intégrale $\int_a^x f(t)\,dt$.*

a) *Une primitive :* $x \mapsto x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$.

b) *Une primitive :* $x \mapsto \frac{x^2+1}{2}\operatorname{Arctan} x - \frac{x}{2}$

c) *Une primitive :* $x \mapsto x\operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}$

d) Après deux IPP :
Une primitive : $x \mapsto x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$.

e) *Une primitive :* $x \mapsto \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{16}x^4$

f) Après deux IPP, on parvient à exprimer $F(x) = \int_0^x \operatorname{sh} t \sin t\,dt$ en fonction de $F(x)$, faire alors passer tous les $F(x)$ à gauche du signe =.
Une primitive : $x \mapsto \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x\sin x - \operatorname{sh} x\cos x)$.

g) Après deux IPP :
Une primitive : $x \mapsto x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{Arctan} x$.

h) Après deux IPP :
Une primitive : $x \mapsto \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}$.

i) *Une primitive :* $x \mapsto \frac{x^2}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2}$.

j) Linéariser $\sin^2$ (formule de trigo) afin de pouvoir le primitiver.
Une primitive : $x \mapsto \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}$.

k) Après deux IPP, on parvient à exprimer $F(x) = \int_0^x e^{\operatorname{Arcsin} t}\,dt$ en fonction de $F(x)$, faire alors passer tous les $F(x)$ à gauche du signe =.
Une primitive : $x \mapsto \frac{1}{2}(x+\sqrt{1-x^2})e^{\operatorname{Arcsin} x}$.

l) Le plus rapide est de primitiver $x \mapsto x^2e^{ix}$ (deux IPP) puis prendre la partie réelle et la partie imaginaire du résultat.
Une primitive de $x \mapsto x^2\cos x$:
$x \mapsto x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$
Une primitive de $x \mapsto x^2\sin x$:
$x \mapsto -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$.

11 On passe en complexe : on primitive $t \mapsto te^t e^{it} = te^{(1+i)t}$ par intégration par parties puis on prend la partie imaginaire du résultat.
Une primitive : $t \mapsto \dfrac{e^t}{2}(t\sin t + (1-t)\cos t)$.

12 Intégrer par parties en écrivant : $\dfrac{1}{\cos^4} = \dfrac{1}{\cos^2} \times \dfrac{1}{\cos^2}$.
Une primitive : $t \mapsto \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin x}{\cos^3 x} + \dfrac{2}{3}\tan x$

13 *N.B. primitiver la fonction f par changement de variable est possible après avoir appliqué le théorème fondamental de l'analyse : une primitive sur chaque intervalle I où f est continue est $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ (a est à choisir dans I). On fait alors un changement de variable à x fixé dans l'intégrale $\int_a^x f(t)\,dt$.*

a) *Une primitive :* $x \mapsto e^x - \ln(1+e^x)$.

b) *Une primitive :* $x \mapsto -\dfrac{4}{5}(\cos x)^{5/2}$.

c) *Une primitive :* $x \mapsto \operatorname{Arctan} \operatorname{sh} x$.

d) *Une primitive :* $x \mapsto 2\operatorname{Arctan}\sqrt{x}$.

e) *Une primitive :* $x \mapsto 2\Big(\dfrac{1}{3}(1+x)^{3/2} - \sqrt{1+x}\Big)$.

f) *Une primitive :* $x \mapsto 2\sqrt{e^x-1} - 2\operatorname{Arctan}\big(\sqrt{e^x-1}\big)$.

g) *Une primitive :* $x \mapsto -\dfrac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$.

h) *Une primitive :* $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln^2\Big(\dfrac{x}{x+1}\Big)$.

i) *Une primitive :* $x \mapsto \ln|\cos x| + \dfrac{1}{2\cos^2 x}$.

j) *Une primitive :* $x \mapsto \dfrac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \dfrac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2}$.

k) *Une primitive :* $x \mapsto \sqrt{2}\operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{1+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\Big)$.

14 **1. a)** Le changement de variable proposé donne
$$F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{4+3t^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x\Big)$$
b) L'expression de $F(x)$ trouvée en **1a)** n'est pas valable pour $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Néanmoins la fonction F est continue en $\pm\dfrac{\pi}{2}$ donc $F(\frac{\pi}{2}) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} F(x)$ et $F(-\frac{\pi}{2}) = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} F(x)$.
Autrement dit, la continuité de F permet de calculer $F(\pm\frac{\pi}{2})$ en prenant les limites de l'expression trouvée en **1a)** aux points $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

2. a) La fonction F est une primitive de $f : \theta \mapsto \dfrac{1}{3+\cos^2\theta}$.
Montrer que $G : x \mapsto F(x-k\pi)$ est aussi une primitive de f.

b) En écrivant l'égalité de a en k et $k+1$, remarquer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad C_{k+1} - C_k = F(x-k\pi) - F(x-k\pi-\pi)$$
Evaluer cette égalité en $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et utiliser les valeurs trouvées en **1b)**. On obtient $C_{k+1} = C_k + \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ et donc $C_k = \dfrac{k\pi}{2\sqrt{3}}$.

c) Combiner les résultats de **1a)**, **2a)** et **2b)**.
Réponse : $F(x) = \dfrac{k\pi}{2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan x\Big)$

15 **1.** La technique pour transformer « $a\cos t + b\sin t$ » permet d'écrire : $\alpha\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{\alpha^2-1}\cos(\theta-\varphi)$ pour un certain $\varphi \in \mathbb{R}$.
Ainsi f ne s'annule pas ssi $\sqrt{\alpha^2-1} < 1$.

2. a) Le changement de variable proposé donne
$$F(x) = \int_0^{\tan\frac{x}{2}} \frac{2\,dt}{(2-\alpha)t^2 + 2t + 2 + \alpha}$$
Mettre alors le dénominateur sous forme canonique puis primitiver à l'aide d'un Arc tangente.
Réponse :
$$F(x) = 2\omega\Big(\operatorname{Arctan}\Big((2-\alpha)\omega\tan\frac{x}{2} + \omega\Big) - \operatorname{Arctan}\omega\Big)$$
b) Il s'agit de calculer : $F(\pi) - F(-\pi)$.
L'expression de $F(x)$ trouvée en **2a)** n'est pas valable pour $x = \pm\pi$ mais la continuité de F en $\pm\pi$ assure que : $F(\pi) = \lim\limits_{x\to\pi^-} F(x)$ et $F(-\pi) = \lim\limits_{x\to-\pi^+} F(x)$.
Autrement dit, la continuité de F permet de calculer $F(\pm\pi)$ en prenant les limites de l'expression trouvée en **2a)** aux points $\pm\pi$.

16 **a)** *Réponse :* $I = \dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\Big)$

b) *Réponse :* $J = 1 + \ln\Big(\dfrac{2}{1+e}\Big)$

c) *Réponse :* $K = \dfrac{\pi}{16}$.

17 Le changement de variable est : $x = \dfrac{\pi}{4} - t$.
On exprime I en fonction d'elle-même.
Réponse : $I = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

18 Poser $u = x + t$ puis développer $\cos(u-x)$ à l'aide d'une formule de trigonométrie. On est ramené à dériver des fonctions de la forme $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$.
Réponse : $g'(x) = \int_0^1 f(x+t)\sin t\,dt + f(x+1)\cos 1 - f(x)$.

19 **a)** IPP puis changement de variable $u = \operatorname{sh} t$.
Une primitive : $x \mapsto \operatorname{sh} x\ln(\operatorname{ch} x) - \operatorname{sh} x + \operatorname{Arctan}\operatorname{sh} x$.

b) IPP puis changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$.
Une primitive : $x \mapsto -\dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x} - \dfrac{1}{2}\ln\Big(1 + \dfrac{1}{x^2}\Big)$.