1 **a)** Utiliser les proprités du logarithme.

Solutions : $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

b) Passer au logarithme.
Solutions : 0 et $\frac{\ln 5}{\ln 7}$.

c) Traiter $x=0$ à part. Pour les solutions dans $\mathbb{R}_+^*$, passer au logarithme.
Solutions : 0, 1 et 4.

d) Faire passer les puissances de 3 à gauche et les puissances de 2 à droite puis factoriser au maximum et passer enfin au logarithme.
Solution : $\frac{3}{2}$.

e) En mutipliant par e^x l'équation équivaut à :
$$(e^x)^2-(e+1)e^x+e=0$$
Il s'agit d'une équation du second degré en e^x.
Solutions : 1 et e.

2 **1.** Comparer les logarithmes en utilisant la concavité de ln.

2. Appliquer **1.** à a_i et b_i et sommer pour $i\in[\![1,n]\!]$.

3. Appliquer **2.** avec $a_i=\dfrac{x_i}{\sum\limits_{j=1}^n x_j^p}$ et $b_i=\dfrac{x_i}{\sum\limits_{j=1}^n y_j^p}$

3 **1.** Appliquer le résultat de l'exercice précédent à chacune des sommes $\sum\limits_{i=1}^n (a_i+b_i)^{p-1}a_i$ et $\sum\limits_{i=1}^n (a_i+b_i)^{p-1}b_i$

2. Utiliser l'inégalité de Jensen.

4 **1.** Revenir à l'exponentielle pour dériver.

2. Trouver une solution et montrer qu'il n'y en a qu'une au moyen du théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone appliqué à $f:x\mapsto 2^x+3^x$.

5 **1.** Dériver deux fois $f:x\mapsto a^x$.

2. Par factorisation géométrique : $\dfrac{a^n-1}{n}=(a-1)\times\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}a^k$

Minorer $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}a^k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}f(k)$ à l'aide de l'inégalité de Jensen

6 **a)** Utiliser un argument de concavité.

b) La question a) permet de minorer « l'intérieur du produit » : $1+\dfrac{\alpha}{k}\geq\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{\alpha}$
Utiliser ceci pour minorer le produit puis faire apparaître un produit télescopique.

7 Revenir à l'exponentielle pour x^α, l'équation $e^x=x^\alpha$ équivaut, pour $x\neq 1$, à $\frac{x}{\ln x}=\alpha$. Etudier les variations de $x\mapsto\frac{x}{\ln x}$.
Réponses :

- Si $\alpha<0$ ou $\alpha=e$, il y a une unique solution.
- Si $0\leq\alpha<e$, il n'y a aucune solution.
- Si $\alpha>e$ il y a deux solutions.

8 Transformer $x^x(1-x)^{1-x}$ en revenant à l'exponentielle puis tout passer au logarithme. On trouve que l'inégalité équivaut à $x\ln x+(1-x)\ln(1-x)\geq-\ln 2$.

Etudier alors la fonction $f:x\mapsto x\ln x+(1-x)\ln(1-x)$ sur $]0,1[$.

9 Si g est convexe montrer que f^α est convexe en revenant à la définition de la convexité. Majorer $f^\alpha\big((1-t)a+tb\big)$ en revenant à l'exponentielle puis en utilisant successivement la convexité de g, la croissance et la convexité de exp.
Pour l'implication réciproque, étant fixé $t\in[0,1]$, l'hypothèse de convexité des f^α permet d'écrire :
$$(\star)\quad \forall\alpha>0,\quad \underbrace{e^{\alpha g((1-t)a+tb)}}_{\varphi(\alpha)}\leq\underbrace{(1-t)e^{\alpha g(a)}+te^{\alpha g(b)}}_{\psi(\alpha)}$$
Remarquer que :
$$g\big((1-t)a+tb\big)=\varphi'(0)\quad\text{et}\quad(1-t)g(a)+tg(b)=\psi'(0)$$
Utiliser $(\star)$ et la définition du nombre dérivé pour montrer que $\varphi'(0)\leq\psi'(0)$.

10 Suivre la méthode du savoir faire SF 2.
Solutions : **a)** 0 et $\ln 7$ **b)** $\ln\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)$.

11 Etant donné $\lambda\in\mathbb{R}$, appliquer l'inégalité des cordes à la fonction convexe $x\mapsto e^{\lambda x}$

12 $x=0$ est solution. Pour $x\neq 0$, on montre en isolant α que l'équation équivaut à $\frac{x}{\operatorname{th}x}=\alpha$.
Etudier alors la fonction $f:x\mapsto\frac{x}{\operatorname{th}x}$ sur $\mathbb{R}^*$ (le signe de f' est celui de son numérateur, redériver ce dernier pour le trouver).
Solutions :

- Si $\alpha>1$ il y a deux solutions sur $\mathbb{R}^*$, donc en tout trois solutions avec 0.
- Si $\alpha\leq 1$ il n'y a pas de solution sur $\mathbb{R}^*$, donc seul 0 est solution.

13 **a)** Procéder par analogie avec les sommes trigonométriques.
Remplacer ch par sa forme exponentielle puis calculer les deux sommes géométriques.
Réponse : $A_n=\begin{cases}\frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} & \text{si } x\neq 0\\ n+1 & \text{si } x=0\end{cases}$

b) Transformer $1-e^{(n+1)x}$ et $1-e^x$ en adaptant la technique permettant de transformer $1-e^{i\theta}$.
Réponse : $A_n=\operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right)\dfrac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}$

14 Etudier les fonctions $\varphi:x\mapsto x-\operatorname{th}x$ et $\psi:x\mapsto\operatorname{sh}x-x$ sur $\mathbb{R}_+$ (0 compris pour pouvoir comparer les valeurs sur $\mathbb{R}_+^*$ avec les valeurs en 0).

15 Considérer la fonction $f:x\mapsto\operatorname{ch}x-\dfrac{x^2}{2}$.

16 **1.** Revenir aux expressions avec les exponentielles.

2. Faire apparaître un produit télescopique en remplaçant $\operatorname{ch}\dfrac{x}{2^k}$ avec la formule de la question 1 (en prenant $a=\frac{x}{2^k}$).

On obtient : $\prod\limits_{k=1}^n\operatorname{ch}\dfrac{x}{2^k}=\dfrac{1}{2^n}\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}}=\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}\times\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}}$.

Il s'agit pour finir de montrer que : $\dfrac{\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

V que $t_n = \dfrac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il suffit de montrer que $\dfrac{\operatorname{sh} t}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$.
Utiliser la définition du nombre dérivé de sh en 0.

17 **a)** On se ramène à $\operatorname{Arccos}\cos\theta$ avec $\theta \in [0,\pi]$ en utilisant la 2π-périodicité de cos.
Réponse : $\frac{2\pi}{3}$.

b) On se ramène à $\operatorname{Arcsin}\sin\theta$ avec $\theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ en utilisant la 2π-périodicité de sin et la propriété $\sin(\pi - x) = \sin x$.
Réponse : $\frac{\pi}{6}$.

c) On se ramène à $\operatorname{Arctan}\tan\theta$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ en utilisant la π-périodicité de tan. *Réponse :* $\frac{\pi}{4}$.

d) Utiliser $\operatorname{Arcsin} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos}$.
Réponse : $\frac{\pi}{4}$.

e) Utiliser $\operatorname{Arccos} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}$.
Réponse : $\frac{9\pi}{10}$.

18 Suivre la méthode du savoir faire SF 5

19 **1.** Poser $x = \pi + \alpha$ avec $\alpha \in [0,\pi]$ puis utiliser $\cos(\pi+\alpha) = \cos(\pi - \alpha)$.
Réponse : $2\pi - x$.

2. $\operatorname{Arccos}\cos x = x$ pour $x \in [0,\pi]$.
Pour simplifier $\operatorname{Arccos}\cos(2x)$ distinguer le cas où $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ et celui où $x \in [\frac{\pi}{2},\pi]$, dans le second cas utiliser la question 1.
Solution : $\frac{5\pi}{6}$

3. La fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}\cos(2x)$ est paire et 2π-périodique.
On déduit donc toutes les solutions de celle trouvée sur $[0,\pi]$.

20 **a)** Poser $\theta = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3}$.
Il suffit de montrer que :

(a) $\tan\theta = 1$.
(b) $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

b) On peut adapter la méthode du a) (en changeant l'intervalle) ou utiliser la propriété liant $\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$ et $\operatorname{Arctan} x$ ainsi que le résultat du a).

c) Posant $\alpha = 2\operatorname{Arccos}\dfrac{3}{4}$ et $\beta = \operatorname{Arccos}\dfrac{1}{8}$ il suffit de montrer que

(a) $\cos\alpha = \cos\beta$.
(b) $\alpha,\beta \in [0,\pi]$.

21 On peut simplifier les calculs en réorganisant les termes.

a) On peut par exemple poser $\alpha = \frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{2}$ et $\beta = \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$ et montrer que

(a) $\tan\alpha = \tan\beta$.
(b) $\alpha,\beta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

b) On peut par exemple poser $\alpha = \operatorname{Arctan} 3 - \frac{\pi}{4}$ et $\beta = \operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}$ et montrer que

(a) $\tan\alpha = \tan\beta$.
(b) $\alpha,\beta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

22 **1.** Montrer que $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\operatorname{sh} x + \operatorname{Arccos}\operatorname{th} x$ est constante en dérivant, puis déterminer la valeur de la constante en calculant f en une valeur bien choisie.
Réponse : $\operatorname{Arctan}\operatorname{sh} x + \operatorname{Arccos}\operatorname{th} x = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Remplacer $\operatorname{th} x$ par une de ses expressions avec l'exponentielle.
Solution : $x = \ln\frac{3}{2}$.

3. Evaluer l'égalité : $\operatorname{Arctan}\operatorname{sh} x + \operatorname{Arccos}\operatorname{th} x = \frac{\pi}{2}$.

23 On procède dans chaque cas par analyse-synthèse (savoir faire SF 7).

a) *Analyse.* Si x est solution, appliquer sin à l'égalité $\operatorname{Arcsin}\frac{x}{2} = \operatorname{Arcsin} x - \frac{\pi}{3}$.
on obtient $x = 0$ ou $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Synthèse. On teste directement -1 et 1, on constate que seul 1 est solution.

b) *Analyse.*Si x est solution, appliquer sin à l'égalité $\operatorname{Arcsin} x = 2\operatorname{Arccos} x$.
on obtient $x = \pm 1$.
Synthèse. On teste directement les trois candidats, on constate que seul $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est solution.

c) *Analyse.* Si x est solution, appliquer cos à l'égalité $\operatorname{Arccos} x^2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos}(1-x^2)$.
on obtient $x = 0$ ou $x = \pm 1$.
Synthèse. On teste directement les trois candidats, on constate qu'ils sont tous trois effectivement solutions.

d) *Analyse.* Si x est solution, appliquer sin à l'égalité $\operatorname{Arcsin}(2x) = 2\operatorname{Arccos} x$.
on obtient $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Synthèse. On montre par des considérations de signe que $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ n'est pas solution.
On ne peut pas tester directement le candidat $\frac{1}{\sqrt{5}}$ *i.e.* calculer $\operatorname{Arcsin}\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\operatorname{Arccos}\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Deux possibilités :

- *Première possibilité.* Poser $\alpha = \operatorname{Arcsin}\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\beta = \operatorname{Arccos}\frac{1}{\sqrt{5}}$ puis assurer que $\alpha = \beta$ en vérifiant que $\cos\alpha = \cos\beta$ et $\alpha,\beta \in [0,\pi]$.
- *Deuxième possibilité.* On montre que l'équation possède une unique solution en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone à $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin} 2x - \operatorname{Arccos} x$, l'étape d'analyse montre alors que la solution est $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

24 L'équation est définie sur $[-1,1]$ (ceci exige une vérification pour le membre de droite). De plus, étant donné $x \in [-1,1]$, on constate que $\alpha = 2\operatorname{Arcsin} x$ et $\beta = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$ ont le même sinus et que $\beta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
Ainsi $\alpha = \beta$ ssi $\alpha \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
Solutions : tous les éléments de $[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

25 Nécessairement, $a \geq 0$ et $a \leq 1$.Il s'agit ensuite de déterminer les valeurs de $a \in [0,1]$ pour lesquelles
$$-\frac{\pi}{2} \leq 2\operatorname{Arcsin}(\sqrt{a}) - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$$
Reste à résoudre l'inéquation (en utilisant la stricte croissance de Arcsin).
Réponse : $a \in [0,\frac{3}{4}]$.

26 **a)** Par analyse-synthèse :

- *Analyse :* Si x est solution, en appliquant tan à l'égalité, on obtient $x = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$.

- *Synthèse* On peut montrer que l'équation a une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$ en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone à $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} 2x + \operatorname{Arctan} x$. L'étape d'analyse assure que $\alpha = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$, on élimine $\frac{-3-\sqrt{17}}{4}$ par des considérations de signe.

b) Par analyse-synhèse :

- *Analyse :* Si x est solution, $x \neq 0$ et en appliquant tan à l'égalité $\operatorname{Arctan}(x-1)+\operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$, on obtient $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.
- *Synthèse* On peut montrer que l'équation a une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$ en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone à $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x-1)+\operatorname{Arctan}(x+1)+\operatorname{Arctan} x$. L'étape d'analyse assure que $\alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, on élimine $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ en montrant que $f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) \leq \frac{\pi}{4}$.

27 On peut par exemple poser $\alpha = \frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{239}$ et $\beta = 4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5}$ et montrer que

1. $\tan \alpha = \tan \beta$.
2. $\alpha, \beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Pour calculer $\tan \beta$, commencer par poser $\beta = 2a$ avec $a = 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5}$ puis appliquer deux fois de suite la formule donnant $\tan 2\theta$ en fonction de θ.

28 On peut procéder par récurrence (double), en exprimant $f_{n+1} + f_{n-1}$ en fonction de f_n.
Une autre possibilité est de délinéariser $\cos(n\theta)$ avec $\theta = \operatorname{Arccos} x$:
$\cos(n\theta) = \operatorname{Re}\left(e^{in\theta}\right) = \operatorname{Re}\left((\cos\theta + i \sin\theta)^n\right) = \operatorname{Re}\left((x+i\sqrt{1-x^2})^n\right)$
On développe $(x + i\sqrt{1-x^2})^n$ avec le binôme, la partie réelle est constituée des termes d'indice pair de la somme, il suffit de vérifier que chacun de ces termes est polynomial en x.

29 **1.** On vérifie que $\tan \theta_k = \frac{1}{1+k+k^2}$ mais ne pas conclure trop vite que $\theta_k = \operatorname{Arctan} \frac{1}{1+k+k^2}$, il convient de vérifier que $\theta_k \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. Faire apparaître un télescopage en remplaçant $\operatorname{Arctan} \frac{1}{1+k+k^2}$ avec la question 1.
Réponse : $\frac{\pi}{2}$.

30 **1.** Utiliser : $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$ et $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

Réponses : $\cos\theta = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ et $\sin\theta = \operatorname{th} x$.

2. En remplaçant $\operatorname{th} x$ par une de ses expressions avec l'exponentielle on obtient : $e^{2x} = \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$.

Utiliser alors la formule : $\sin\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$.