Exponentielle, logarithme, puissances

1 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

a) $\ln|x| + \ln|x+1| = 0$ **b)** $5^{x^2} = 7^{x^3}$ **c)** $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

d) $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$ **e)** $e^x + e^{1-x} = e+1$

2 Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que : $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i^p = \sum_{i=1}^{n} b_i^q = 1$

Montrer que : $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq 1$.

3. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+^*$.

En déduire que : $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$

3 SF 9 SF 11 Soit $p \in]1, +\infty[$.
On souhaite montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

1. Démontrer cette inégalité en utilisant le résultat de la question **3.** de l'exercice 2.

2. Démontrer directement cette inégalité à l'aide de la fonction $x \mapsto \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^p$.

4 SF 1 **1.** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la dérivée et les variations de la fonction $x \mapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$.

2. Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

5 SF 1 SF 9 SF 11

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $x \mapsto a^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $a > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $\dfrac{a^n - 1}{n} \geq a^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n-1}{2}}$

6 SF 8 Soit $\alpha \in [0, 1]$.

a) Montrer que pour tout $x > -1$: $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha$

7 SF 10 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de α, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation : $e^x = x^\alpha$. *Indication : Reformuler l'équation en une équation de la forme « $f(x) = \alpha$ »*

8 SF 1 En étudiant une fonction bien choisie, montrer :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad x^x (1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$$

9 SF 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. On pose $g = \ln f$. Montrer que la fonction g est convexe ssi f^α est convexe pour tout $\alpha > 0$.

Fonctions hyperboliques

10 SF 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $4 \operatorname{ch} x - 3 \operatorname{sh} x = 4$ **b)** $16 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 15$

11 SF 8 Montrer que pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1, 1]$:

$$e^{\lambda x} \leq \operatorname{ch} \lambda + x \operatorname{sh} \lambda$$

12 SF 10 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de α, le nombre de solutions de l'équation : $e^x(\alpha - x) = e^{-x}(\alpha + x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

13 **a)** Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer : $A_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$.

b) Exprimer A_n à l'aide des fonctions ch et sh.

14 SF 8 Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \operatorname{th} x < x < \operatorname{sh} x$.

15 SF 9 Montrer : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} \dfrac{x+y}{2} \leq \dfrac{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y}{2} - \dfrac{(x-y)^2}{8}$

16 **1.** Montrer que pour tout réel a : $\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que : $\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch} \dfrac{x}{2^k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$

Fonctions circulaires réciproques

17 Simplifier les quantités suivantes :

a) $\operatorname{Arccos} \cos \dfrac{8\pi}{3}$ **b)** $\operatorname{Arcsin} \sin \dfrac{17\pi}{6}$

c) $\operatorname{Arctan} \tan \dfrac{-11\pi}{4}$ **d)** $\operatorname{Arcsin} \cos \dfrac{7\pi}{4}$ **e)** $\operatorname{Arccos} \sin \dfrac{17\pi}{5}$

18 SF 5 Montrer : $\forall x \in]-1, 1[, \quad \operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

19 **1.** Simplifier : $\operatorname{Arccos}(\cos x)$ pour tout $x \in]\pi, 2\pi]$

2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in [0, \pi]$:
$\operatorname{Arccos}(\cos x) - \dfrac{1}{2} \operatorname{Arccos}(\cos 2x) = \dfrac{2\pi}{3}$

3. Résoudre l'équation précédente sur $\mathbb{R}$ tout entier.

20 SF 6 **a)** Etablir : $\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

b) Calculer : $\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3$

c) Etablir : $2 \operatorname{Arccos} \dfrac{3}{4} = \operatorname{Arccos} \dfrac{1}{8}$

21 SF 6 **a)** Montrer que : $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{8}$

b) Montrer que : $\operatorname{Arctan} 3 - \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

22 SF 2 SF 5 **1.** Simplifier : $\operatorname{Arctan} \operatorname{sh} x + \operatorname{Arccos} \operatorname{th} x$ pour $x \in \mathbb{R}$

2. Résoudre l'équation : $\operatorname{th} x = \dfrac{5}{13}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3. En déduire l'égalité : $\operatorname{Arctan} \dfrac{5}{12} + \operatorname{Arccos} \dfrac{5}{13} = \dfrac{\pi}{2}$.

23 SF 7 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x, en précisant l'ensemble de définition.

a) $\mathrm{Arcsin}\, x = \dfrac{\pi}{3} + \mathrm{Arcsin}\, \dfrac{x}{2}$ **b)** $\mathrm{Arcsin}\, x = 2\,\mathrm{Arccos}\, x$

c) $\mathrm{Arccos}\,(x^2) + \mathrm{Arccos}\,(1-x^2) = \dfrac{\pi}{2}$ **d)** $\mathrm{Arcsin}(2x) = \mathrm{Arccos}\, x$

24 SF 6 Résoudre l'équation : $2\,\mathrm{Arcsin}\, x = \mathrm{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$ d'inconnue x.

25 Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'équation $\mathrm{Arcsin}\, x = 2\,\mathrm{Arcsin}(\sqrt{a}) - \dfrac{\pi}{6}$ possède des solutions

26 SF 3 SF 4 SF 7 Résoudre les équations d'inconnues $x \in \mathbb{R}$:

a) $\mathrm{Arctan}\, 2x + \mathrm{Arctan}\, x = \dfrac{\pi}{4}$

b) $\mathrm{Arctan}(x-1) + \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$

27 SF 6 Montrer que : $\dfrac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Arctan}\, \dfrac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\, \dfrac{1}{239}$.

28 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $f_n(x) = \cos(n\,\mathrm{Arccos}\, x)$ pour tout $x \in [-1\,,1]$. Montrer que f_n est polynomiale.

29 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose : $\theta_k = \mathrm{Arctan}(k+1) - \mathrm{Arctan}\, k$

1. Exprimer θ_k au moyen d'un seul Arc tangente pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Etudier la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{k^2+k+1}$

30 SF 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose : $\theta = \mathrm{Arctan}\, \mathrm{sh}\, x$.

1. Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $\mathrm{ch}\, x$ et $\mathrm{th}\, x$.

2. En déduire que : $x = \ln\Big(\tan\Big(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\Big)\Big)$.