Conjugué, module

1 SF 2 Déterminer la forme algébrique de :

a) $z = \dfrac{i-1}{1+i}$ **b)** $u = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 + \dfrac{1-7i}{4+3i}$

c) $v = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$ **d)** $w = \dfrac{1}{1+\frac{2}{i}}$

2 SF 2 Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ tels que :
a) $\left|\dfrac{z+1}{z-2}\right| = \sqrt{2}$ **b)** $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z+1}{z-2}\right) = 1$

3 SF 3 Soit $a, b \in \mathbb{C}$.

1. Démontrer *l'identité du parallélogramme :*

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

2. En déduire : $|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$.

4 SF 3 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Montrer que $\left(\dfrac{z+|z|}{\sqrt{\operatorname{Re} z + |z|}}\right)^2 = 2z$.

5 SF 3 SF 1 On note A l'ensemble des $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ tels que le complexe $\dfrac{z^2}{z+i}$ est imaginaire pur

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer $z \in A$ ssi : $z = -\bar{z}$ ou $|z|^2 + 2\operatorname{Im} z = 0$

2. Représenter graphiquement l'ensemble A.

3. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions de l'équation : $z^2 + 2iaz - 2a = 0$ est inclus dans A.

6 SF 1 SF 4 Soient $u, v \in \mathbb{U}$ tels que $uv \neq -1$.
On pose : $z = \dfrac{u+v}{1+uv}$. Montrer que z est réel

7 SF 1 SF 4 Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $z \neq 1$. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.

8 SF 3 Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$ tels que : $|a| < 1$ et $|b| < 1$.
Montrer que : $|a-b| < |1 - \bar{a}b|$.

9 Soient $a, b \in \mathbb{C}^*$. Montrer que : $\left|\dfrac{a}{|a|^2} - \dfrac{b}{|b|^2}\right| = \dfrac{|a-b|}{|a||b|}$.

10 SF 3 Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Etablir : $|a-b|^2 \leq (1+|a|^2)(1+|b|^2)$.

11 SF 4 Soit $u, v, w \in \mathbb{U}$.

a) Montrer : $\left|\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{w}\right| = |u+v+w|$

b) En déduire : $|uv + uw + vw| = |u+v+w|$

12 SF 4 Résoudre l'équation : $\bar{z}(z-1) = z^2(\bar{z}-1)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

13 SF 1 SF 4 Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$ tous de même module.
Montrer que $\dfrac{(z_1+z_2)\ldots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1 z_2 \ldots z_n}$ est réel.

Inégalité triangulaire

14 **a)** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$. Montrer : $\left|z^3 + 2iz\right| \leq 3$

b) Déterminer les complexes pour lesquels il y a égalité.

15 **1.** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z - (1+i)| \leq 1$.
Montrer : $\sqrt{10} - 1 \leq |z-4| \leq \sqrt{10} + 1$.

2. Interpréter géométriquement cette double inégalité.

16 Soient $a, b, c, d \in \mathbb{U}$. Montrer : $|ab - cd| \leq |a-c| + |b-d|$.

Applications à la trigonométrie

17 SF 6 Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser **a)** $\sin^3 x$ **b)** $\sin^3(2x)\cos(3x)$

18 SF 7 **a)** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos\theta$

b) En déduire l'expression de $\cos^2 \dfrac{\pi}{10}$, puis de $\cos \dfrac{\pi}{5}$

19 SF 5 SF 8 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculer

a) $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\alpha + \beta)$ **b)** $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$

20 SF 5 SF 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\cos k| \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2\sin 1}$

Forme trigonométrique

21 SF 2 **1.** Mettre sous forme trigonométrique :

a) $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ **b)** $z_2 = 4 + 4i$ **c)** $z_3 = 2i$ **d)** $z_4 = -5$

2. Mettre $\dfrac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$ sous forme trigonométrique.
En déduire $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

22 SF 2 SF 5 Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Calculer le module et un argument de : **a)** $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}$ **b)** $\dfrac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 - \cos\theta - i\sin\theta}$.

23 SF 9 Mettre sous forme algébrique :
a) $z_1 = (\sqrt{3} - i)^7$ **b)** $z_2 = (1 + i\sqrt{3})^{1000}$.

24 SF 9 Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+i)^n$ soit réel.

25 SF 9 Résoudre dans $\mathbb{C}$: **a)** $\bar{z} = jz^2$ **b)** $z^3 = -16\bar{z}^7$

26 SF 9 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)$
On décrira géométriquement l'ensemble des solutions

27 SF 9 Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 \in]-\infty, 8]$.
On décrira géométriquement l'ensemble des solutions

28 SF 10 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
a) $e^z = i$ **b)** $e^{iz\pi} = 1 - i$ **c)** $e^z = \sqrt{3} + 3i$ **d)** $e^z = 0$

29 SF 5 SF 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que : $|z_1| = \ldots = |z_n|$ et $|z_k - z_\ell| \in \mathbb{N}^*$, pour tous $k, \ell \in [\![1, n]\!]$, distincts.

Racines énièmes

30 SF 5 SF 8 *Ex. 89, banque INP*

Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Déterminer le module de $z^k - 1$.

b) On pose : $S = \sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

31 SF 2 SF 13 Calculer les racines cinquièmes de j et $\dfrac{2\sqrt{2}}{1-i}$.

32 SF 13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
a) $(z+i)^3 = 8i$ **b)** $(z+2)^4 = 4\sqrt{2}(1+i)$ **c)** $z^6 - 1 = i$

33 SF 11 SF 13 **1.** Résoudre l'équation : $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

2. Résoudre l'équation : $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

34 SF 5 SF 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
a) $(z+1)^n = (z-1)^n$. **b)** $z^n + 1 = 0$ **c)** $z^n = \bar{z}$

35 SF 11 On pose $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $A = u + u^2 + u^4$, $B = u^3 + u^5 + u^6$.
a) Calculer $A + B$ et AB **b)** En déduire A et B

36 SF 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Calculer : **a)** ★ $\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$ **b)** ★★★ $\sum_{p=0}^{n-1} (1+\omega^p)^n$

37 SF 4 SF 5 SF 9 SF 13 Soient $a \in \mathbb{U}$ et $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ les racines n-ièmes de a dans $\mathbb{C}$.

1. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, écrire le complexe $(1+z_k)^n$ sous la forme $R_k e^{i\theta_k}$ où $R_k \in \mathbb{R}$ et $\theta_k \in \mathbb{R}$.

2. En déduire que les points d'affixes $(1+z_k)^n$ sont alignés.

Second degré dans $\mathbb{C}$

38 SF 14 SF 15 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
a) $2z^2 - (1+5i)z - 2(1-i) = 0$ **b)** $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$
c) $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$ **d)** $z^2 - az + a^2 = 0$ où $a \in \mathbb{C}$

39 SF 15 Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation :

$$2(1+i)z^2 + 2(a+i)z + ia(1-i) = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

40 SF 10 SF 15 Résoudre l'équation $e^z + e^{-z} = 2i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

41 SF 15 SF 16 Résoudre le système : $\begin{cases} x + y = 3i \\ xy = -1 - 3i \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

42 SF 16 Résoudre le système : $(S) : \begin{cases} x + y = 2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

43 SF 16 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation : $z^6 - 2z^3 \cos\theta + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Applications à la géométrie

44 SF 18 A quelle condition nécessaire et suffisante sur z :

a) 1, z et z^2 sont-ils les affixes de trois points alignés ?

b) $1+i$, $z+i$, $1+iz$ sont-ils les affixes de trois points alignés ?

c) z, z^2 et z^3 sont les sommets d'un triangle rectangle en z^2 ?

45 SF 12 SF 18 Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que les points d'affixes j, z et jz sont alignés ssi z est sur le cercle de centre $-j^2$ et de rayon 1.

46 SF 18 Trouver les complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$ tels que le triangle de sommets z, i, iz soit rectangle isocèle en i.

47 SF 1 SF 18 Trouver les complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tels que les points d'affixes z, z^2 et $\dfrac{1}{z}$ sont alignés.

48 SF 1 SF 18 Trouver tous les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que z et ses deux racines carrées forment un triangle rectangle en z

49 SF 17

1. Caractériser géométriquement la similitude f dans chacun des cas suivants :

a) $f : z \mapsto (1 + i\sqrt{3})z - i\sqrt{3}$.

b) $f : z \mapsto (1 + i\tan\alpha)z + \sqrt{2}(1-i)$ où $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

2. Soient t la translation de vecteur -1 et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Caractériser géométriquement les fonctions composées :
a) $f = t \circ r \circ t$. **b)** $g = r \circ t \circ r$.

50 SF 12 SF 17 Deux sommets opposés d'un carré ont pour affixes a et b. Déterminer les affixes des deux autres sommets.

51 SF 12 SF 17 Soit A, B, C trois points d'affixes a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$

52 SF 18

1. Soient A, B et C trois points d'affixes respectifs a, b, c distincts tels que le triangle ABC est inscrit dans un cercle de centre O. Montrer que le point H d'affixe $h = a + b + c$ est l'orthocentre du triangle ABC.

2. En déduire que le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés.

53 SF 3 Soit $n \geq 3$.

Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, on pose : $m = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on définit une suite de complexes $(z_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ comme suit : $z_i^{(0)} = z_i$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ $z_i^{(k+1)}$ est le milieu du segment $[z_i^{(k)}, z_{i+1}^{(k)}]$ (en convenant que $z_{n+1}^{(k)} = z_1^{(k)}$).

Montrer que : $\left|z_i^{(k)} - m\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.