1 Utiliser le conjugué du dénominateur.
Réponses : **a)** $z = i$ **b)** $u = -1-i$ **c)** $v = -3$ **d)** $w = \frac{1}{5} + i\frac{2}{5}$

2 **a)** L'équation équivaut à $|z+1|^2 = 2|z-2|^2$.

Ecrire z sous la forme $z = x+iy$ puis calculer $|z+1|^2$ et $|z-2|^2$ en fonction de x et y en écrivant $z+1$ et $z-2$ sous forme algébrique puis en utilisant la définition du module.
On obtient l'équation d'un cercle en utilisant la forme canonique : *Réponse :* Cercle de centre $(5,0)$ et de rayon $3\sqrt{2}$.

b) Commencer par écrire z sous la forme $z = x+iy$ puis écrire $\frac{z+1}{z-2}$ sous forme algébrique (multiplier par le conjugué du dénominateur). On obtient que l'équation équivaut à $x = 2$.

3 **1.** Utiliser $|z|^2 = z\overline{z}$ pour développer $|a+b|^2$ et $|a-b|^2$.

2. Calculer $\left(|a+b|+|a-b|\right)^2 - \left(|a|+|b|\right)^2$ en utilisant **1.**

4 Développer le carré au numérateur $(z+|z|)^2$ puis utiliser $|z|^2 = z\overline{z}$ et $z+\overline{z} = 2\operatorname{Re} z$

5 **1.** Poser $Z = \frac{z^2}{z+i}$: $z \in A$ ssi $\overline{Z} = -Z$.
En éliminant les quotients puis en passant tout à gauche et en factorisant on obtient que $\overline{Z} = -Z$ équivaut à $(z+\overline{z})(|z|^2 + 2\operatorname{Im} z) = 0$.

2. Pour reconnaître géométriquement l'ensemble des z tels que $|z|^2 + 2\operatorname{Im} z$ écrire z sous la forme $z = x+iy$, puis utiliser la mise sous forme canonique.
Réponse : A est la réunion de l'axe des imaginaires purs (privé de $-i$) et du cercle de centre $-i$ et de rayon 1.

3. Il n'est pas nécessaire de calculer les racines. Vérifier que $-i$ n'est jamais racine puis utiliser le fait qu'une racine de $z^2+2iaz-2a = 0$ vérifie $z^2 = -2iaz+2a$ pour observer que le quotient $\frac{z^2}{z+i}$ est imaginaire pur.

6 Combiner les deux idées très très importantes des savoirs faire :

- Pour montrer que z est réel montrer que $\overline{z} = z$.
- Vu que $u \in \mathbb{U}$ on a : $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$, de même pour v.

7 Poser $Z = \frac{z+1}{z-1}$. Il s'agit de montrer que $\overline{Z} = -Z$.
Calculer $\overline{Z}$ en utilisant le fait que $\overline{z} = \frac{1}{z}$ puisque $z \in \mathbb{U}$.

8 Utiliser l'expression du module avec le conjugué : $|Z|^2 = Z\overline{Z}$.
Calculer $|a-b|^2$ en prenant $Z = a-b$ puis calculer $|1-\overline{a}b|^2$ en prenant $Z = 1-\overline{a}b$.
On obtient $|1-\overline{a}b|^2 - |a-b|^2 = 1+|a|^2|b|^2 - |a|^2 - |b|^2$.
Factoriser au maximum cette quantité pour montrer qu'elle est positive en utilisant le fait que, par hypothèses, $1-|a|^2 \geq 0$ et $1-|b|^2 \geq 0$.

9 Mettre $\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}$ au même dénominateur puis factoriser en utilisant les propriétés $|z|^2 = z\overline{z}$ et $|\overline{z}| = |z|$.

10 Utiliser l'expression du module avec le conjugué $|Z|^2 = Z\overline{Z}$ pour développer $|a-b|^2$.
Développer aussi $(1+|a|^2)(1+|b|^2)$ puis factoriser alors au maximum la différence, on trouve au final

$$(1+|a|^2)(1+|b|^2) - |a-b|^2 = |1+\overline{a}b|^2$$

11 **a)** Utiliser $\frac{1}{u} = \overline{u}$, $\frac{1}{v} = \overline{v}$ et $\frac{1}{w} = \overline{w}$ car $u, v, w \in \mathbb{U}$.

b) Reprendre l'égalité du a) et réduire $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$ au même dénominateur puis utiliser le fait que $|u| = |v| = |w| = 1$.

12 *Analyse.* $z = 0$ est solution. Montrer que si $z \neq 0$ est solution, alors $|z| = 1$.
Synthèse. Reste à tester quels $z \in \mathbb{U}$ sont solutions.
Pour $z \in \mathbb{U}$, on peut résoudre par équivalence en utilisant $\overline{z} = \frac{1}{z}$.
(On peut aussi résoudre l'équation par équivalence en posant $z = e^{i\theta}$ puis en utilisant la transformation de $1-e^{i\theta}$).
Solutions $z = 0$, $z = 1$, $z = i$ et $z = -i$.

13 Les z_i étant tous de même module, onpeut les écrire sous la forme $z_i = ru_i$ avec $u_i \in \mathbb{U}$.
En factorisant tous les r on obtient

$$Z = \frac{1}{r^n}\underbrace{\frac{(u_1+u_2)(u_2+u_3)\dots(u_n+u_1)}{u_1\dots u_n}}_{=U}$$

Reste à montrer que U est réel. Pour cela calculer $\overline{U}$ en utilisant $\bar{u}_i = \frac{1}{u_i}$.

14 **a)** Factoriser $z^3+2iz = z(z^2+2i)$ puis majorer $\left|z^2+2i\right|$ à l'aide de l'inégalité triangulaire.

b) Il y a égalité ssi toutes les inégalité sont des égalités *i.e.* ssi : $|z| = 1$ et $\left|z^2+2i\right| = \left|z^2\right| + |2i|$.
L'égalité dans l'inégalité triangulaire impose $\left|z^2\right| = k2i$ pour un certain $k \in \mathbb{R}_+$ que l'on détermine via $\left|z^2\right| = 1$.
Solutions : $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

15 **1.** Ecrire astucieusement $z-4 = \left(z-(1+i)\right) + (-3+i)$ puis utiliser les inégalités triangulaires

$$|a|-|b| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$$

2. L'implication du 1) prouve qu'un certain disque est inclus dans une certaine couronne.

16 Utiliser la factorisation astucieuse : $ab-cd = (a-c)b+c(b-d)$ puis l'inégalité triangulaire.

17 Appliquer la technique du cours pour linéariser

18 Appliquer la technique du cours pour « délinéariser »

19 Appliquer la technique du cours pour calculer ce type de somme.

20 **a)** Puisque $|\cos x| \leq 1$: $|\cos x| \geq \cos^2 x$.

b) A l'aide de la minoration du a) :

$$\sum_{k=1}^{n} |\cos k| \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2}S_n \quad \text{où} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\cos(2k).$$

Calculer la somme trigonométrique S_n en utilisant les complexes puis montrer que $|S_n| \leq \frac{1}{\sin 1}$.

21 **1.** *Réponses*

a) $z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ **b)** $z_2 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ **c)** $z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ **d)** $z_4 = 5e^{i\pi}$

2. On met numérateur et dénominateur sous forme trigonométrique puis on fait le quotient des formes trigonométriques en profitant des propriétés de l'exponentielle imaginaire.
On obtient : $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

On met ensuite $Z = \frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$ sous forme algébrique (avec le conjugué du dénominateur) ce qui donne la forme algébrique de $e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}Z$. On identifie ensuite :

- Les parties réelles : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
- Les parties imaginaires : $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

22 **a)** On peut écrire $1+e^{i\theta}+e^{2i\theta} = Re^{i\theta}$ avec $R = 1+2\cos\theta$ en utilisant la factorisation par l'angle moitié sur $1+e^{2i\theta}$ puis en factorisant par $e^{i\theta}$.
Il reste un peu de travail pour obtenir la forme trigonométrique car R n'est pas forcément positif.
Distinguer :

- les valeurs de θ pour lesquelles $R>0$
- celles pour lesquelles $R<0$ (on écrit alors $R = -Re^{i\pi}$).

b) Reconnaître des exponentielles imaginaires au numérateur et au dénominateur, puis utiliser les transformations de $1\pm e^{i\theta}$.
Le module est $\left|\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}\right|$ et un argument $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ selon le signe de $\tan\frac{\theta}{2}$

23 Dans les deux cas, commencer par utiliser la forme trigonométrique du complexe pour en calculer la puissance.
Réponses : **a)** $z_1 = 2^6(-\sqrt{3}+i)$ **b)** $z_2 = -2^{999}(1+i\sqrt{3})$.

24 Ecrire $(1+i)^n$ sous forme trigonométrique $(1+i)^n = re^{i\theta}$ puis le complexe $(1+i)^n$ est réel ssi $\theta \equiv 0\ [\pi]$

25 L'intervention de puissances de z favorise la recherche de z sous forme trigonométrique.
Commencer par vérifier si $z=0$ est solution.
Chercher ensuite les solutions $z\in\mathbb{C}^*$ sous la forme $z = re^{i\theta}$ où $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

a) A partir de $z = re^{i\theta}$, écrire $\bar{z}$ et jz^2 sous forme trigonométrique puis identifier les modules et les arguments (modulo 2π), on obtient deux équations : une équation sur r et une équation sur θ.
Solutions $z=0$, $z = e^{-2i\frac{\pi}{9}}$, $z = e^{4i\frac{\pi}{9}}$ et $z = e^{10i\frac{\pi}{9}}$

b) A partir de $z = re^{i\theta}$, écrire z^3 et $-16\bar{z}^{16}$ puis identifier les modules et les arguments (modulo 2π), on obtient deux équations : une équation sur r et une équation sur θ.
Solutions pour r et θ On trouve $r = \frac{1}{2}$ et $\theta \equiv \frac{\pi}{10}\left[\frac{\pi}{5}\right]$.
Complexes z solutions. On obtient dix complexes solutions, les $z = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5}}$ où k décrit $[\![0,9]\!]$.

26 L'intervention de puissances de z favorise la recherche de z sous forme trigonométrique.
Commencer par vérifier si $z=0$ est solution.
Chercher ensuite les solutions $z\in\mathbb{C}^*$ sous la forme $z = re^{i\theta}$ où $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.
A partir de $z = re^{i\theta}$, écrire z^3 sous forme trigonométrique puis calculer $\mathrm{Re}(z^3)$ et $\mathrm{Im}(z^3)$ en fonction de r et θ.
On obtient une équation trigonométrique sur θ (pas de condition sur r), que l'on peut par exemple résoudre en se ramenant à l'équation $\cos\alpha = \cos\beta$.
Solutions pour r et θ On trouve $\theta \equiv \frac{\pi}{12}\left[\frac{\pi}{3}\right]$ et r est arbitraire.
Complexes z solutions : les complexes $z = \lambda e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z = \lambda e^{5i\frac{\pi}{12}}$, $z = \lambda e^{3i\frac{\pi}{4}}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ quelconque (géométriquement c'est la réunion de trois droites passant par 0).

27 L'intervention de puissances de z favorise la recherche de z sous forme trigonométrique.
Commencer par vérifier si $z=0$ est solution.
Chercher ensuite les solutions $z\in\mathbb{C}^*$ sous la forme $z = re^{i\theta}$ où $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.
Solutions : les complexes $z=\lambda$, $z = \lambda e^{2i\frac{\pi}{3}}$, $z = \lambda e^{-2i\frac{\pi}{3}}$ avec $\lambda\in\,]-\infty,2]$ quelconque (géométriquement c'est la réunion de trois demi-droites passant par 0).

28 Utiliser dans chaque cas la technique du savoir faire SF 10 : on cherche z sous la forme $z = x+iy$ on a directement e^z sous forme trigonométrique : $e^z = e^x e^{iy}$.
On met le second membre sous forme trigonométrique lui aussi et on identifie :

- les modules – en général une équation du type $e^x = \ldots$
- les arguments – en général une équation du type $y \equiv \ldots\ [2\pi]$

Solutions
a) $z = i\frac{\pi}{2}+2ik\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
b) $z = -\frac{1}{4}+2k-i\frac{\ln 2}{2\pi}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
c) $z = \ln(2\sqrt{3})+i\frac{\pi}{3}+2ik\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
d) Aucune

29 Construire $u_1,\ldots,u_n \in \mathbb{U}$ tels que $|u_k-u_\ell| \in \mathbb{Q}^*$ puis prendre $z_k = Ru_k$ où R est un dénominateur commun aux $|u_k-u_\ell|$.

30 **a)** $z^k-1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1$, utiliser alors la transformation de $1-e^{i\theta}$ puis prendre le module.
Réponse : $\left|z^k-1\right| = \sin\frac{k\pi}{n}$.

b) Utiliser le résultat du 1 pour se ramener à une somme trigonométrique que l'on calcule en suivant à la lettre la méthode usuelle (savoir faire SF 8). Penser à la fin à factoriser le dénominateur à nouveau à l'aide de la transformation de $1-e^{i\theta}$.

31 On applique la méthode du cours (savoir faire SF 13).
Réponses pour les racines cinquièmes de j :
$e^{2i\frac{\pi}{15}}$, $e^{8i\frac{\pi}{15}}$, $e^{14i\frac{\pi}{15}}$, $\bar{j}$, $e^{-4i\frac{\pi}{15}}$
Réponses pour les racines cinquièmes de $Z = \frac{2\sqrt{2}}{1-i}$:
Mettre d'abord Z sous forme trigonométrique.
$2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{\pi}{20}}$, $2^{\frac{1}{5}}e^{9i\frac{\pi}{20}}$, $2^{\frac{1}{5}}e^{17i\frac{\pi}{20}}$, $2^{\frac{1}{5}}e^{-3i\frac{\pi}{4}}$, $2^{\frac{1}{5}}e^{-7i\frac{\pi}{20}}$

32 **a)** Calculer les racines cubiques z_0, z_1 et z_2 de $Z = 8i$.
Les solutions sont les $z_k - i$ pour $k = 0,1,2$.
Solutions : $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $-3i$

b) Calculer les racines quatrièmes z_0, z_1, z_2 et z_3 du complexe $Z = 4\sqrt{2}$.
Les solutions sont les z_k-2 pour $k = 0,1,2,4$.
Solutions : $8^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{16}}-2$, $8^{\frac{1}{4}}e^{9i\frac{\pi}{16}}-2$, $-8^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{16}}-2$, $-8^{\frac{1}{4}}e^{9i\frac{\pi}{16}}-2$.

c) Les solutions sont les racines sixièmes de $Z = 1+i$.
Solutions : $2^{\frac{1}{12}}e^{\frac{i\pi}{24}}$, $2^{\frac{1}{12}}e^{\frac{3i\pi}{8}}$, $2^{\frac{1}{12}}e^{\frac{17i\pi}{24}}$, $-2^{\frac{1}{12}}e^{\frac{i\pi}{24}}$, $-2^{\frac{1}{12}}e^{\frac{3i\pi}{8}}$, $-2^{\frac{1}{12}}e^{\frac{17i\pi}{24}}$

33 **1.** $Z=1$ n'est pas solution et pour $Z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, $1+Z+Z^2+Z^3$ est une somme géométrique de raison Z.
En appliquant la formule donnant cette somme, on obtient que Z est solution ssi $Z^4 = 1$ (et $Z\neq 1$).
Solutions : -1, i, $-i$.

2. $z\neq i$ est solution ssi $Z = \frac{z+i}{z-i}$ est solution de l'équation du 1 *i.e.* ssi $Z=-1$, $Z = i$ ou $Z = -i$.
Il suffit donc de résoudre $\frac{z+i}{z-i} = 1$, $\frac{z+i}{z-i} = i$ et $\frac{z+i}{z-i} = -i$.
Solutions 1, -1 et $-i$.

34 **1.** $z=1$ n'est pas solution puis pour $z \neq 1$, z est solution ssi $\frac{z+1}{z-1}$ est une racine n^e de l'unité.
Solutions : $z = -\frac{1+\omega_k}{1-\omega_k}$ pour $k \in [\![1,n-1]\!]$
En utilisant les transformations $1 \pm e^{i\theta}$, on trouve finalement $z = \dfrac{-i\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![1,n-1]\!]$

2. Les solutions sont les racines n^e de $Z=-1$.

3. Commencer par vérifier si $z=0$ est solution.
Puis chercher les solutions $z \in \mathbb{C}^*$ sous la forme $z = re^{i\theta}$ où $r>0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. A partir de $z = re^{i\theta}$, écrire $\overline{z}$ et z^n sous forme trigonométrique puis identifier les modules et les arguments (modulo 2π), on obtient deux équations : une équation sur r et une équation sur θ.
Solutions : $z = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

35 **a)** Utiliser les propriétés de $\mathbb{U}_7$:

- $u^7=1, \quad u^8=u, \quad u^9=u^2 \ldots$
- $1+u+u^2+\cdots+u^6=0$

Solutions : $A+B=-1$ et $AB=2$.

b) A et B sont les racines de : $z^2+z+2=0$.
Les racines sont : $z_1 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$.
Il reste à savoir si $A=z_1$ (et donc $B=z_2$) ou si $A=z_2$ (et donc $B=z_1$).
Examiner le signe de $\operatorname{Im} A = \sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$ pour montrer que $\operatorname{Im} A > 0$.

36 **1.** Utiliser les règles de calculs avec les puissances :
$$\omega^0 \times \omega^1 \times \cdots \times \omega^{n-1} = \omega^{0+1+\cdots+n-1}$$
Réponse : $(-1)^{n-1}$.

2. Développer $(1+\omega^p)^n$ à l'aide de la formule du binôme puis intervertir les deux symboles $\sum$. La somme intérieure (somme en p) est une somme géométrique de raison $q=\omega^k$. Calculer cette somme en distinguant les indices k tels que $q=1$ et ceux tels que $q \neq 1$.
Réponse : $2n$.

37 **1.** Ecrire $a = e^{i\theta}$ puis exprimer les z_k en fonction de θ (avec la formule pour les racines n^e).
Ensuite utiliser la transformation de $1+e^{i\theta}$ pour factoriser $1+z_k$.
On obtient $(1+z_k)^n = (-1)^k 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2. L'angle θ_k trouvé en **1.** ne dépend pas de k.

38 *Réponses pour vérifier les calculs.*

a) Le discriminant Δ vaut : $\Delta = -8-6i$.
Une racine carrée de Δ est : $\delta = 1-3i$.
Les solutions sont : $z_1 = 2i$ et $z_2 = \frac{1+i}{2}$.

b) Le discriminant Δ vaut : $\Delta = -8i = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
Une racine carrée de Δ est : $\delta = 2-2i$.
Les solutions sont : $z_1 = 1$ et $z_2 = -1+2i$.

c) Le discriminant Δ vaut : $\Delta = -3-4i$.
Une racine carrée de Δ est : $\delta = 1-2i$.
Les solutions sont : $z_1 = -1-i$ et $z_2 = -3-2i$.

d) Le discriminant Δ vaut : $\Delta = -3a^2$.
Une racine carrée de Δ est : $\delta = i\sqrt{3}a$.
Les solutions sont : $z_1 = ae^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_1 = ae^{-i\frac{\pi}{3}}$.

39 Le discriminant Δ de l'équation s'écrit sous la forme d'un carré : $\Delta = (a-i)^2$.
Solutions : $-\dfrac{1+i}{2}$ et $\dfrac{-a}{1+i}$.

40 L'équation équivaut à $(e^z)^2 - 2ie^z + 1 = 0$.

- On trouve les racines Z_1 et Z_2 de $Z^2 - 2iZ + 1 = 0$.
- On résout les deux équations $e^z = Z_1$ et $e^z = Z_2$ (méthode du savoir faire SF 10).

Solutions : Les complexes z de la forme
$z = \ln(1+\sqrt{2}) + i\dfrac{\pi}{2} + 2ik\pi$ ou $z = \ln(\sqrt{2}-1) - i\dfrac{\pi}{2} + 2ik\pi$
où k décrit $\mathbb{Z}$.

41 On sait d'après le cours que les solutions sont les racines de l'équation $z^2 - 3iz - 1 - 3i = 0$.
Le discriminant Δ vaut : $\Delta = -5+12i$.
Une racine carrée de Δ est : $\delta = 2+3i$.
Les solutions sont : -1 et $1+3i$.

42 Se ramener à un système somme-produit en mettant au même dénominateur dans la deuxième équation.
Réponse $x = 1+i$ et $y = 1-i$ ou $x = 1-i$ et $y = 1+i$.

43 z est solution de l'équation ssi $Z = z^3$ vérifie l'équation du second degré : $Z^2 - 2\cos\theta Z + 1 = 0$.

- On trouve les racines Z_1 et Z_2 de $Z^2 - 2\cos\theta Z + 1 = 0$.
- On calcule les racines cubiques de Z_1 et Z_2.

Solutions : $e^{i\theta}$, $je^{i\theta}$, $j^2e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$, $je^{-i\theta}$, $j^2e^{-i\theta}$

44 **1.** Utiliser la traduction de l'alignement. Il s'agit de savoir si $Z = \dfrac{z^2-1}{z-1}$ est réel.
La condition est $z \in \mathbb{R}$

2. Utiliser de même la traduction de l'alignement.
Ce n'est jamais le cas (sauf pour $z = i$, cas dans lequel ils sont confondus)

3. Utiliser la traduction de l'othogonalité. Il s'agit de savoir si $Z = \dfrac{z^3-z^2}{z-z^2}$ est imaginaire pur.
La condition est $z \in \mathbb{R}$

45 Utiliser la traduction de l'alignement. Il s'agit de savoir si $Z = \dfrac{z-jz}{j-jz}$ est réel.
Simplifier d'abord Z en utilisant les propriétés de j puis étudier l'égalité $Z = \overline{Z}$.
Après calculs on obtient : $Z = \overline{Z}$ ssi $|z|^2 + jz + j^2\overline{j} = 0$.
Comparer enfin avec l'équation du cercle de centre $-j^2$ et de rayon 1

46 Deux possibilités :

1. Utiliser la caractérisation avec le quotient de l'orthogonalité et des distances : il s'agit de savoir si $Z = \dfrac{i-iz}{i-z}$ est imaginaire pur et de module 1. Il n'y a que deux valeurs possibles : $Z = \pm i$ (intersection de l'axe $i\mathbb{R}$ et du cercle $\mathbb{U}$)
On trouve que $Z = i$ est impossible, l'autre permet de trouver que $z = \frac{1+i}{2}$.
2. Le triangle est rectangle isocèle en i ssi iz est l'image de z par la rotation de centre i et d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ *i.e.* ssi $iz - i = \pm(z-i)$.

47 Utiliser la traduction de l'alignement. Il s'agit de savoir si $Z = \dfrac{\frac{1}{z}-z}{z^2-z}$ est réel.
Simplifier d'abord Z puis étudier l'égalité $Z = \overline{Z}$.
Après calculs on obtient : $Z = \overline{Z}$ ssi $(\overline{z}-z)(|z|^2+\overline{z}+z) = 0$.
Revenir à la forme algébrique de z : il s'agit de la réunion

de l'axe des réels et du cercle de centre $(-1,0)$ et de rayon 1, (privés de 0 et de 1 par l'énoncé).

48 Donner un nom aux racines carrées de z, par exemple δ et $-\delta$ (avec $\delta^2 = z$).
Ensuite utiliser la traduction de l'orthogonalité avec le quotient. Il s'agit de savoir si $Z = \dfrac{z-\delta}{z+\delta}$ est imaginaire pur.
Après calculs on trouve que l'égalité $Z = -\overline{Z}$ équivaut à $|z| = 1$.

49 **1.** Suivre la méthode du savoir faire **SF 17** .

a) *Réponse :* Similitude de centre $\omega = 1$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) *Réponse :*

- Si $\alpha = 0$, f est la translation de vecteur $\sqrt{2}(1-i)$
- Si $\alpha \neq 0$, f est la similitude de centre $\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{\tan\alpha}$, de rapport $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ et d'angle α.

2. Par définition t est l'application $t : z \mapsto z-1$ et $r : z \mapsto iz$. Il suffit de calculer les composées.
Réponses.

- $t \circ r \circ t : z \mapsto iz - i - 1$, c'est la rotation de centre $-i$ de d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- $r \circ t \circ r : z \mapsto -z - i$, c'est l'homothétie de centre $-\frac{i}{2}$ de de rapport -1.

50 En notant c et d les affixes des deux autres sommets on peut par exemple exploiter le fait que b est l'image de a par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre l'un des deux sommet, disons c et qu'alors b est l'image de a par la rotation de centre d et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
Réponses : dans la configuration ci-dessus on obtient :

$$c = \frac{1-i}{2}a + \frac{1+i}{2}b \quad \text{et} \quad d = \frac{1+i}{2}a + \frac{1-i}{2}b$$

51 Il s'agit de savoir si A est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ *i.e.* si $a - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c-b)$.
On simplifie les calculs en se rappelant que $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$ puis en utilisant les propriétés de j.

52 **1.** En notant H le point d'affixe $h = a+b+c$, il s'agit de montrer que sur H est sur chacune des trois hauteurs.
Par exemple, H est sur la hauteur issue de A si (AH) est perpendiculaire à (BC) c'est à dire si le complexe $Z = \dfrac{h-a}{c-b}$ est imaginaire pur.
On peut montrer que $Z + \overline{Z} = 0$ en réduisant au même dénominateur puis en simplifiant compte-tenu de ce que $|b| = |c|$ (B et C sont sur un même cercle de centre O).

2. En considérant un repère orthonormé direct d'origine le centre du cercle circonscrit, on est ramené à la situation de la question 1 *i.e.* celle d'un triangle ABC dont l'origine O est le centre du cercle circonscrit. Ainsi :

- L'orthocentre de ABC est le point d'affixe $h = a+b+c$.
- Le centre de gravité de ABC a pour affixe $g = \dfrac{a+b+c}{3}$
- Le centre du cercle circonscrit est le point O.

Il suffit par exemple de vérifier que $\dfrac{h-0}{g-0}$ est réel.

53 Commencer par montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left| z_i^{(k+1)} - z_i^{(k)} \right|^2 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ à l'aide notamment de l'identité du parallélogramme.