Calculs de sommes et de produits

1 SF 1 SF 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes

a) $A_n = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)$ **b)** $B_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k)^2$ **c)** $E_n = \sum_{k=3}^{n-1} q^k$ $(n \geq 3, q \in \mathbb{C})$

d) $F_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 3^{n-k}$ **e)** $G_n = \sum_{k=0}^{n} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$

f) $H_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^3$. **g)** $I_n = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$

2 SF 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En écrivant $k = (k+1)-1$, calculer :

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k k!$ **b)** $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

3 SF 1 SF 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les produits suivants

a) $A_n = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$ **b)** $B_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k-2}{k+2}$

c) $C_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ **d)** $D_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+2}$

e) $E_n = \prod_{k=0}^{n} e^{2^k}$ **f)** $F_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k^2}$

4 SF 3 Soit $n \geq 3$. Calculer le produit : $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$.

Indication : Factoriser k^3-1 et k^3+1.

5 SF 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$ $[2\pi]$. Calculer : $\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k}$.

6 Montrer sans récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$$

7 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2k+1)$.

1. Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.

2. Calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8 Etudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

9 **a)** Soit $\ell \in \mathbb{N}$.Trouver tous les $k \in \mathbb{N}$ tels que : $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = \ell$

b) En déduire : $\sum_{k=0}^{(2n)^2-1} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Majoration, minoration de sommes

10 SF 5 Soit n un entier naturel. Montrer que : $\sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!$

11 SF 3 SF 5

a) Montrer que pour tout $k \geq 2$: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$.

12 SF 3 SF 2 Soit $q \in [0,1[$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{1\leq i,j\leq n} q^{ij} \leq \frac{q}{(1-q)^2}$.

13 SF 5 Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 3.

a) Montrer que : $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ pour tout $k \geq 2$

b) En déduire que : $\frac{\binom{n}{k}}{n^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ pour tout $k \in [\![2,n]\!]$

c) En déduire : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$

14 SF 1 SF 5 Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $s_n = a_1 + \cdots + a_n$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\prod_{k=1}^{n} (1+a_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{s_n^k}{k!}$.

15 **1.** Montrer que $x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$ est convexe sur $]0, \frac{1}{2}]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in]0, \frac{1}{2}]$.

Montrer : $\left(\sum_{i=1}^{n} (1-x_i)\right)^n \times \prod_{i=1}^{n} x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \times \prod_{i=1}^{n} (1-x_i)$

16 SF 5 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer que : $\left(1+\frac{x}{y}\right)^n + \left(1+\frac{y}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$

17 SF 5 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle vérifiant : $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $n a_{n+1} \leq 2\sum_{i=1}^{n} a_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}$.

18 SF 5 Pour tout $n \geq 2$, on pose : $S_n = \sum_{k=2}^{n} \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln k} \right\rfloor$.

1. Montrer que : $S_n = \sum_{j=2}^{n} \left\lfloor n^{\frac{1}{j}} \right\rfloor$, pour tout $n \geq 2$.

2. En déduire que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Sommes et produits doubles

19 SF 1 SF 2 SF 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} 2^j$.

a) Vérifier que $S_n = n2^{n+1} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que : $S_n = \sum_{j=0}^{n} (j+1)2^j$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire que : $\sum_{i=1}^{n} i2^{i-1} = (n-1)2^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Calculer : $T_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j+1} i2^{i-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

20 SF 2 SF 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes et produits doubles :

a) $S_n = \sum_{1\le i\le j\le n} (j-i)$ **b)** $T_n = \sum_{1\le i<j\le n} j$ **c)** $U_n = \sum_{1\le i\le j\le n} \frac{i}{j+1}$

d) $V_n = \sum_{1\le i\le j\le n} \frac{i^2}{j}$ **e)** $W_n = \sum_{1\le i,j\le n} x^{i+j}$ **f)** $X_n = \sum_{1\le i,j\le n} \min(i,j)$

g) $Y_n = \prod_{1\le i,j\le n} i^j$ **h)** $Z_n = \prod_{1\le i,j\le n} ij$

21 SF 4 Montrer sans procéder par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^{n} k^k$$

22 SF 2 SF 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1\le i\le j\le n} \frac{i}{j}$

2. ★★★ Plus généralement montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n} \frac{i_1}{i_2\cdots i_k} = \frac{n(n+2^k-1)}{2^k}$$

23 SF 4 Soient $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\sum_{1\le i,j\le n} \frac{a_i a_j}{i+j} \ge 0$.

Indication : Considérer $P : x \mapsto \sum_{1\le i,j\le n} \frac{a_i a_j}{i+j} x^{i+j}$.

Coefficients binomiaux et formule du binôme

24 SF 1 SF 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1. A l'aide du changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire la valeur de $2S_n$ puis celle de S_n pour $n \in \mathbb{N}$.

25 SF 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

1. Calculer la somme $A_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ de deux façons :

a) en dérivant l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

b) à l'aide de la formule « sans nom ».

2. En utilisant l'une des deux méthodes précédentes, calculer la somme $B_n = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

26 SF 2

Pour tout $n \ge 1$ on pose $S_n = \sum_{\substack{0\le k\le n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $T_n = \sum_{\substack{0\le k\le n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$ aussi notées $S_n = \sum_{0\le 2k\le n} \binom{n}{2k}$ et $T_n = \sum_{0\le 2k+1\le n} \binom{n}{2k+1}$.

1. Calculer $S_n + T_n$ et $S_n - T_n$ pour tout $n \ge 1$.

2. En déduire les valeurs de S_n et T_n pour tout $n \ge 1$.

27 SF 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

2. En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

- si $1 \le k \le \frac{n}{2}$: $\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$
- si $\frac{n}{2} \le k \le n-1$: $\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k}$

3. *Application*. Etablir : $\binom{2n}{n} \ge \frac{4^n}{2n+1}$.

28 SF 2 SF 4

a) Montrer que : $\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-j}$ pour tous $i, j, n \in \mathbb{N}$ tels que $i \le j \le n$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $S_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-j}$

29 SF 3 Soit $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \le n$.

A l'aide d'un téléscopage, établir : $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

30 SF 2 SF 3 SF 4

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose : $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$.

Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} S_i(n) = (n+1)^{p+1}$$