1 **a)** Développer $i(i-1)=i^2-i$, séparer les sommes pour faire apparaître $\sum\limits_{i=0}^{n} i$ et $\sum\limits_{i=0}^{n} i^2$.

Réponse : $A_n = \dfrac{n(n^2-1)}{3}$.

b) Changement d'indice $j=n-k$ pour se ramener à $\sum\limits_{j=0}^{n} j^2$

Réponse : $B_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) C'est un résultat du cours (somme géométrique).

Réponse : $C_n = \begin{cases} \dfrac{q^3-q^n}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-3 & \text{si } q=1 \end{cases}$.

d) Se ramener à une somme géométrique en écrivant $(-1)^k 3^{n-k} = 3^n \times (\frac{-1}{3})^k$.

Réponse : $D_n = \dfrac{3^{n+1}+(-1)^n}{4}$.

e) En utilisant la formule sur $2\sin a\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b)$ transformer $2\sin\frac{x}{2}\cos kx$ et faire apparaître une somme télescopique.
Réponse : $E_n = \sin\frac{2n+1}{2}x + \sin\frac{x}{2}$.

f) En Séparant les termes d'indices pairs $k=2p$ et d'indices impairs $k=2p+1$: $\quad F_n = \sum\limits_{p=0}^{n}(2p)^3 - \sum\limits_{p=0}^{n}(2p-1)^3$

En développant $(2p-1)^3$ et en séparant les sommes, il ne reste que la somme des p^2, la somme des p et la somme des 1.
Réponse : $F_n = n^2(4n+3)$.

g) En Utilisant la relation $\left\lfloor \dfrac{a}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{a+1}{2}\right\rfloor = \lfloor a \rfloor$ avec $a = \dfrac{x}{2^k}$, on fait apparaître une somme télescopique.

Réponse : $G_n = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \dfrac{x}{2^{n+1}} \right\rfloor$.

2 **a)** On fait apparaître un télescopage :

$$kk! = \big((k+1)-1\big)k! = (k+1)!-k!$$

Réponse : $S_n = (n+1)!-1$.

b) On fait apparaître un télescopage :

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

Réponse : $T_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

3 **a)** Séparer les produits puis effectuer le changement d'indice $j=n-k+1$ dans le second produit
Réponse : $A_n = (n!)^2$.

b) *Réponse :* $B_n = 0$ (un des termes du produit est nul).

c) Factoriser : $1-\frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k}$ puis faire apparaître deux produits télescopiques.
Réponse : $C_n = \frac{n+1}{2n}$.

d) Séparer les produits $\prod\limits_{k=0}^{n} k$ et $\prod\limits_{k=0}^{n}(k+2)$ et effectuer le changement d'indice $j=k+2$ dans le second produit. Simplifier enfin les termes communs aux deux produits.
Réponse : $D_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.

e) Utiliser les propriétés de l'exponentielle : un produit d'exponentielles est égal à l'exponentielle de la somme : $\prod\limits_{k=0}^{n} e^{2^k} = \exp\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k\Big)$.

Réponse : $E_n = e^{2^{n+1}-1}$.

f) Séparer les deux produits $\prod\limits_{k=1}^{n} 2^k$ et $\prod\limits_{k=1}^{n} k^2$.

Les règles de calculs avec les puissances permettent d'écrire : $\prod\limits_{k=1}^{n} 2^k = 2^{(\sum_{k=1}^{n} k)}$ et $\prod\limits_{k=1}^{n} k^2 = \Big(\prod\limits_{i=1}^{n} k\Big)^2$
Il suffit d'appliquer ces deux règles.

Réponse : $F_n = \dfrac{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(n!)^2}$.

4 En factorisant :
$k^3-1=(k-1)(k^2+k+1)$ et $k^3+1=(k+1)(k^2-k+1)$
puis en séparant les produits :

$$P_n = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1} = \underbrace{\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}}_{Q_n} \times \underbrace{\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}}_{R_n}$$

- Q_n se calculent en écrivant $\dfrac{k-1}{k+1} = \dfrac{k-1}{k} \times \dfrac{k}{k-1}$ ce qui fait apparaître deux télescopage
- R_n est télescopique en remarquant que $k^2+k+1 = k(k+1)+1$ et $k^2-k+1=(k-1)k+1$.

Réponse : $\quad P_n = \dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$

5 Remplacer $\cos\dfrac{x}{2^k}$ en utilisant : $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ et faire ainsi apparaître un produit télescopique.
Réponse : $\quad \dfrac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$

6 Factoriser $4k-2$ par 2 et remarquer que $\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

On obtient $\prod\limits_{k=1}^{n}(4k-2) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

Il suffit de simplifier les facteurs communs à $(2n)!$ et $n!$ pour obtenir le résultat final : $n! = 1\times\cdots\times n$ est le produit des n premiers termes de $(2n)!$.

7 **1.** $S_0=1$, $S_1=-2$, $S_2=3$, $S_3=-4$, ...

2. Montrer par récurrence sur n : $\quad S_n = (-1)^n(n+1)$.
Pour l'hérédité, noter que par définition de S_n :
$$S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1}(2n+3)$$

8 Il s'agit de calculer le signe de $u_{n+1}-u_n$ et de $v_{n+1}-v_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_{n+1} = \sum\limits_{k=n+2}^{2n+2}\frac{1}{k}$ et $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$
pour calculer $u_{n+1}-u_n$:

- les termes $\frac{1}{k}$ pour $n+1 \leq k \leq 2n$ apparaissent dans les deux sommes et s'annulent.
- il reste les termes apparaissant dans une seule des deux sommes, à savoir les termes d'indices $k=2n+1$ et $k=2n+2$ pour u_{n+1} et $k=n+1$ pour u_n.

On obtient : $\quad u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}$. *Réponse :* (u_n) est (strictement) croissante.
De même on obtient $v_{n+1}-v_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n}$. *Réponse :* (v_n) est (strictement) décroissante.

9 **1.** Traduire l'égalité $\lfloor\sqrt{k}\rfloor = p$ par un encadrement de $\sqrt{k}$.

Réponse : $[\![p^2, (p+1)^2 - 1]\!]$.

2. Regrouper les termes consécutifs pour lesquels $\lfloor\sqrt{k}\rfloor$ ne varie pas en utilisant la question 1 :

$$\sum_{k=0}^{(2n)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor} = \sum_{\ell=0}^{2m-1} \sum_{k=\ell^2}^{(\ell+1)^2-1} (-1)^\ell$$

On retombe ensuite sur la somme calculée à l'exercice 7.

Réponse : $-2n$.

10 On applique le savoir faire SF 5 : il s'agit de majorer $k!$:

1. pour $k \in [\![0,n]\!]$: $\quad k! \leq n!$.
2. il suffit de sommer ces inégalités pour $k \in [\![0,n]\!]$

11 **a)** Noter que pour $k \geq 2$: $\quad \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k^2-k}$.

b) La question a) donne une majoration de « l'intérieur ». Sommer les inégalités $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour $k \in [\![2,n]\!]$ Ajouter ensuite le terme d'indice $k = 1$ à savoir 1.

On obtient après télescopage : $\quad \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

12 Ecrire : $\quad \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} q^{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (q^i)^j$. La somme intérieure est une somme géométrique de raison q^i.

Une fois celle-ci calculée, majorer $\dfrac{q^i - q^{n+1}}{1-q^i}$ par $\dfrac{q^i}{1-q}$

13 **a)** $k! = 2 \times 3 \times \cdots \times k$ et chaque facteur du produit est supérieur à 2.

b) Avec la définition du coefficient binomial :

$$\frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \times \frac{1}{k!}$$

le premier quotient est inférieur à 1.

c) Utiliser la formule du binôme : $(1+\dfrac{1}{n})^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$.

Il suffit de majorer l'intérieur en utilisant la majoration du *b*), ne pas oublier de sortir les termes d'indice $k = 0$ et $k = 1$ pour lesquels la majoration du b) ne s'applique pas.

14 Procéder par récurrence sur n.Pour l'étape d'hérédité :

- D'une part, l'hypothèse de récurrence permet de montrer que

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) = (1+a_{n+1})\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{s_n^k + a_{n+1}s_n^k}{k!}$$

- D'autre part, pour minorer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{s_{n+1}^k}{k!}$, on peut minorer « l'intérieur » à l'aide de la formule du binôme en remarquant que pour tout $k \geq 1$:

$$s_{n+1}^k = (s_n + a_{n+1})^k \geq s_n^k + k a_n s_n^{k-1}$$

(les deux premiers termes dans la formule du binôme).

15 **1.** Dériver deux fois $f : x \mapsto \ln\Big(\dfrac{1-x}{x}\Big)$.

2. Il s'agit de montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{1-x_i}{x_i} \geq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} 1-x_i\right)^n}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^n}$.

Pour cela comparer les logarithmes et minorer : $\ln\Big(\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\frac{1-x_i}{x_i}\Big)$ à l'aide de l'inégalité de Jensen

16 Développer les deux termes à l'aide de la formule du binôme. Pour minorer la somme obtenue, commencer par démontrer que : $\quad t + \dfrac{1}{t} \geq 2 \quad$ pour tout $t > 0$.

17 **1.** Utiliser l'hypothèse de sous-additivité de la suite pour écrire $a_{n+1} \leq a_i + a_{n+1-i}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et sommer ses inégalités.

2. Procéder par récurrence forte sur n. Pour l'hérédité commencer par majorer na_{n+1} avec la question **1.** : $na_{n+1} \leq 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$. Ensuite utiliser l'hypothèse de récurrence forte pour majorer les a_i : $\quad a_n \leq 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{a_j}{j}$.

En intervertissant les deux sommes puis en séparant les sommes obtenues, il apparaît à nouveau la somme $2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ que l'on peut minorer par na_{n+1}. On aboutit à $na_{n+1} \leq (n+1)\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{j}$. $\quad$ Il ne reste qu'à ajouter a_{n+1}.

18

19 **a)** On commence par calculer $\sum\limits_{j=i}^{n} 2^i$ (somme géométrique) puis on a à nouveau à faire à une somme géométrique.

b) Intervertir les deux symboles $\sum$

c) Egaler les deux expressions trouvées aux questions a) et b) pour S_{n-1}.

d) On commence par utiliser le résultat du c) au rang $j+1$ pour calculer $\sum\limits_{i=1}^{j+1} i2^{i-1}$ puis on a à nouveau à faire à la somme du c).

Réponse : $T_n = (n-1)2^{n+2} + n + 4$.

20 **a)** Séparer les sommes puis écrire les deux sommes doubles de façon judicieuse ici :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(j-i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i$$

On factorise j dans la première somme, on obtient la somme des j^2. Pour la deuxième somme, on calcule $\sum\limits_{i=1}^{j} i$ (somme des entiers i) puis on développe le résultat : on obtient la somme des j et la somme des j^2.

Réponse : $S_n = \frac{n(n^2-1)}{6}$.

b) On écrit $T_n = \sum\limits_{j=2}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j-1} j$ puis on factorise j dans la somme intérieure (somme en i), on obtient la somme des j et la somme des j^2.

Réponse : $\ T_n = \frac{n(n^2-1)}{3}$

c) On écrit $U_n = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{j}\frac{i}{j+1}$ puis on factorise $\frac{1}{j+1}$ dans la

somme intérieure (somme en i), on calcule la somme intérieure (somme des i) puis on obtient la somme des j.
Réponse : $U_n = \frac{n(n+1)}{4}$.

d) On écrit $V_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i^2}{j}$ puis on factorise $\frac{1}{j}$ dans la somme intérieure (somme en i), on calcule la somme intérieure (somme des i^2) puis on obtient, après séparation des sommes, la somme des j^2, la somme des j et la somme des 1.
Réponse : $V_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{18} + \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{6}$.

e) On écrit $W_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x^i x^j$, on factorise x^i puis on a affaire deux fois de suite à des sommes géométriques.
Réponse : $W_n = \begin{cases} \left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right)^2 & \text{si } x \neq 1 \\ n^2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

f) Ecrire $X_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$ puis couper la somme interne au niveau de i : $\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j)$,
et : $\min(i,j) = \begin{cases} j & \text{pour } j \in [\![1\,,i]\!] \\ i & \text{pour } j \in [\![i+1\,,n]\!] \end{cases}$.
Réponse : $X_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

g) Les règles de calculs avec les puissances permettent d'écrire : $\prod_{i=1}^{n} i^c = \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^c$ et $\prod_{j=1}^{n} c^j = c^{(\sum_{j=1}^{n} j)}$.
Il suffit d'appliquer ces deux règles.
Réponse : $Y_n = (n!)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

h) Attention au comportement du produit : $\prod_{j=1}^{n} ij = i^n \prod_{j=1}^{n} j$.
En utilisant deux fois d'affilée cette règle on fait apparaître le produit définissant la factorielle.
Réponse : $Z_n = (n!)^{2n}$.

21 Remarquer que : $\frac{n!}{k!} = \prod_{i=k+1}^{n} i$.
Ceci permet d'écrire le produit $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!}$ comme un produit double. Il suffit alors d'intervertir les symboles $\prod$

22 **1.** Ecrire $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j}$ puis factoriser $\frac{1}{j}$ dans la somme intérieure (somme en i).
Réponse : $\frac{n(n+3)}{4}$.
2. Procéder par récurrence sur k.

23 Dériver la fonction $P : x \mapsto \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{a_i a_j}{i+j} x^{i+j}$. On trouve que $P'(0) = 0$ et pour tout $x > 0$, $P'(x) = \frac{1}{x}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\right)^2 \geq 0$.
La croissance de P sur $\mathbb{R}_+$ assure que $P(1) \geq P(0)$.

24 **1.** Le changement d'indice proposé par l'énoncé puis la propriété de symétrie des coefficients du binôme donne $S_n = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$.
2. Ecrire $2S_n = S_n + S_n$, utiliser pour le premier terme la définition de S_n de l'énoncé et pour le second l'expression trouvée à la question 1 et regrouper les deux sommes pour former une somme allant de 0 à $(2n+1)$. Reconnaître ensuite une somme du binôme.
Réponse : $S_n = 2^{2n}$.

25 **1. a)** Méthode du savoir faire SF 6, traitée dans le cours.
b) Pour $k \geq 1$: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
En utilisant cette égalité, on peut ensuite factoriser le n. On se ramène ensuite à une somme du binôme avec le changement d'indice $j = k-1$.
Réponse : $A_n = n2^{n-1}$.
2. Avec la méthode du savoir faire SF 6 :
- On part de : $\forall x > 0$, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.
- On dérive deux fois
- On évalue en $x = 1$ et on sépare les sommes dans le membre de droite pour faire apparaître B_n et A_n (déjà calculée).

Réponse : $B_n = n(n+1)2^{n-2}$.

26 **1.** Pour $S_n + T_n$ il suffit de regrouper les termes d'indices pair et ceux d'indices impairs pour former une seule somme.
Pour $S_n - T_n$, il s'agit de trouver une expression en fonction de k qui vaut $\binom{n}{k}$ si k est pair et $-\binom{n}{k}$ si n est impair. Penser à $(-1)^k$ (qui vaut 1 si k est pair et -1 si k est impair).
Réponse : $S_n + T_n = 2^n$ et $S_n - T_n = 0$.
2. Les relations trouvées en **1.** donne un système de deux équations vérifiées par S_n et T_n.
Réponse : $S_n = T_n = 2^{n-1}$.

27 **1.** Il suffit de remplacer les coefficients du binôme par leur définition avec les factorielles.
2. Utiliser l'égalité de la question précédente.
3. Avec la formule du binôme :
$$4^n = 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$$
Majorer $\binom{2n}{k}$ par $\binom{2n}{n}$ dans la somme (avec **2.**).

28 **a)** Il suffit de remplacer les coefficients du binôme par leur définition avec les factorielles.
b) Utiliser l'égalité du a) puis intervertir les deux $\sum$ et factoriser $\binom{n}{j}$ dans la somme intérieure (somme en i). On obtient deux fois d'affilées des sommes du binôme.
Réponse : $S_n = 3^n$.

29 La formule de Pascal permet d'écrire $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$ et de faire apparaître un télescopage.

30 En remplaçant $S_i(n)$ par sa définition puis en intervertissant les symboles $\sum$ on obtient
$$\sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} S_i(n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} k^i$$
La somme intérieure se calcule en observant que :
$$\sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} k^i = (k+1)^{p+1}$$
ce qui permet de faire apparaître un télescopage.