1 Etudier la limite du quotient $\frac{f}{g}$ dans chaque cas.
Réponses à trouver :
a) $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\big(g(x)\big)$ **b)** $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\big(g(x)\big)$ **c)** $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\big(f(x)\big)$

2 Etudier la limite de $\frac{f(x)}{x^\alpha}$ et de $\frac{(\ln x)^\alpha}{f(x)}$ en revenant à l'exponentielle.

3 *Réponses à trouver*
a) Faux **b)** Faux **c)** Vrai

4 **1.** Appliquer le TVI strictement monotone.

2. a) En appliquant le logarithme à l'égalité : $f(W(x)) = x$, on obtient : $W(x) + \ln\big(W(x)\big) = \ln x$.
Reste à montrer que : $\ln\big(W(x)\big) \underset{x\to+\infty}{=} o\big(W(x)\big)$ (étudier le quotient) pour obtenir :
$$\ln x \underset{x\to+\infty}{=} W(x) + o(W(x)).$$

b) Etudier la limite du quotient $\frac{\ln W(x)}{\ln\ln(x)}$ en écrivant $W(x) = \frac{W(x)}{\ln(x)}\ln(x)$ au numérateur.

5 *On peut « deviner » l'équivalent en simplifiant l'hypothèse en*
$$\frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{\sqrt{x}} = 1$$
Sous cette hypothèse simplificatrice, on peut exprimer $f(x)$ à l'aide des $f(\frac{x}{2^k}) - f(\frac{x}{2^{k+1}})$ en écrivant
$$f(x) - f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{x}{2^k}\Big) - f\Big(\frac{x}{2^{k+1}}\Big) = \sqrt{x}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^k$$
Ainsi pour tout $n \geq 1$: $f(x) - f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = \sqrt{x} \times \frac{1 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$
Par passage à la limite, sachant que $f(t) \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0$ on obtient
$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{x}$$
Dans le cas général : $f(x) \underset{x\to0}{\sim} C\sqrt{x}$ où : $C = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$

Pour établir ce résultat, on peut adapter le raisonnement et revenir à la définition pour montrer que : $\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to0}{\longrightarrow} C$.
Pour cela, constater que l'hypothèse peut s'écrire
$$f(x) - f\Big(\frac{x}{2}\Big) = \sqrt{x}\big(1 + r(x)\big) \quad \text{où :} \quad r(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$$
En procédant comme ci-dessus, on obtient pour tout $n \geq 1$:
$$f(x) - f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = \sqrt{x} \times \frac{1 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} + \underbrace{\sqrt{x}\sum_{k=0}^{n-1} r\Big(\frac{x}{2^k}\Big) \times \frac{1}{\sqrt{2}^k}}_{R_n(x)}$$
En fixant $\varepsilon > 0$, l'hypothèse $r(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ fournit un α tel que $-\varepsilon \leq r(x) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$.
En sommant ces inégalités puis en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :
$$C\sqrt{x}(1-\varepsilon) \leq f(x) \leq C\sqrt{x}(1+\varepsilon)$$

6 *Réponses à trouver*
a) $\sqrt{x}$ **b)** x^2 **c)** $\frac{\pi}{n^2}$ **d)** 9 **e)** 1 **f)** $\ln 5$
g) $\ln x$ **h)** $\sqrt{n}^n$ **i)** $\frac{x-a}{1+a^2}$ **j)** $\frac{\pi - x}{\sqrt{\pi}}$

7 *Réponses à trouver*
a) $\frac{1}{\sqrt{n}}$ **b)** $\frac{\ln n}{n}$ **c)** e^{1-n} **d)** $\frac{n^k}{k!}$ **e)** $\frac{1}{n^2}$
f) $\frac{e^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}$ **g)** $\frac{\ln n}{n}$ **h)** $-\ln n$
i) $\frac{\ln n}{2n^2}$ **j)** $n^3\ln\big(\ln n\big)$

8 *Réponses à trouver*
a) $-1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{13}{6}x^3 + o(x^3)$
b) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + o(x^6)$
c) $1 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{65}{24}x^4 + o(x^4)$
d) $-\frac{10}{3}x^3 + 6x^5 + o(x^5)$

9 *Réponses à trouver*
a) $1 - x + x^2 - \frac{11}{6}x^3 + o(x^3)$
b) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
c) $x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
d) $e - \frac{e}{4}x^2 + o(x^2)$
e) $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + 0 + o(x^3)$
f) $2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$
g) $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{48}x^3 + o(x^3)$
h) $\frac{1}{6}x - \frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

10 *Réponses à trouver*
a) $\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$
b) $\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$
c) $ex + \frac{e}{4}x^2 + 0 + o(x^3)$

11 *Réponses à trouver*
a) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) - \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^3 + o\Big(\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^3\Big)$
b) $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\big(x-2\big)^2 - \frac{\sqrt{2}}{32}\big(x-2\big)^3 + o\Big(\big(x-2\big)^3\Big)$
c) $(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 + o\Big(\big(x-1\big)^3\Big)$
d) $e - \frac{e}{2}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2 + o\Big(\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^2\Big)$

12 **1.** Avec le DL de exp à l'ordre $n+1$ on peut écrire : $1+x+\cdots+x^{n+1}=e^x+u(x)$ où $u(x)=o(x^{n+1})$.
Ceci permet d'écrire $f(x)=\ln(e^x+u(x))$.
Factoriser par e^x pour se ramener au DL de $\ln(1+v)$.
Réponse : $f(x) \underset{x\to 0}{=} x+o(x^n)$

2. Par théorème de primitivation, un DL$_n$ de f' suffit.

Or : $f=\ln(w)$ donc : $f'=\dfrac{w'}{w}$.

En remarquant que : $w'(x)=w(x)-\dfrac{x^n}{n!}$

on trouve : $f'(x)\underset{x\to 0}{=}1-\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

d'où (primitivation) : $f(x)\underset{x\to 0}{=}0+x-\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+o(x^{n+1})$

13 **1.** C'est $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

2. Utiliser le théorème de primitivation.

14 **1.** • *Première méthode :* A l'aide de l'équivalent de e^x-1 en 0 on obtient $f(x)\underset{x\to 0}{=}x^n+o(x^n)$

• *Deuxième méthode :* Avec la formule du binôme

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}e^{kx}$$

En développant les e^{kx} à l'ordre n puis en intervertissant les sommes, on obtient

$$f(x)\underset{x\to 0}{=}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-1)^n}{\ell!}S_{n,\ell}x^\ell+o(x^n)$$

Utiliser ensuite l'unicité de la liste des coefficients d'un DL

2. Dans la méthode 2, on peut obtenir un DL à l'ordre $n+1$ en développant les e^{kx} à l'ordre $n+1$.

Le coefficient de x^{n+1} est alors $\dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}S_{n,n+1}$.

On peut affiner la méthode 1 en écrivant

$$e^x-1\underset{x\to 0}{=}x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)=x\Big(1+\underbrace{\frac{x}{2}+o(x)}_{=u(x)}\Big)=x\big(1+u(x)\big)$$

puis en élevant à la puissance n et en développant $(1+u)^n$ à l'ordre 1.
Identifier enfin les coefficients de x^{n+1}.

15 • *f possède en 0 le développement limité à l'ordre 2 :*

$$f(x)\underset{x\to 0}{=}x+o(x^2)$$

car $x^3\sin\dfrac{1}{x^2}\underset{x\to 0}{=}o(x^2)$ (revenir à la limite du quotient)

• *La fonction f n'est pas deux fois dérivable en 0*
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet :

- Elle l'est sur $\mathbb{R}^*$ (par composition puis produit ...)
- On constate que $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$.

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

- Si $x=0$: $f'(0)=0$
- Si $x\neq 0$: $f'(x)=1+\underbrace{3x^2\sin\dfrac{1}{x^2}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0}-\underbrace{2\cos\dfrac{1}{x^2}}_{\text{pas de limite en 0}}$.

En particulier f' n'est pas continue en 0 donc n'est pas non plus dérivable en ce point.

16 La formule de Taylor-Young donne

$$f(x)\underset{x\to 0}{=}f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

L'équivalence demandée découle de l'unicité de la liste des coefficients du DL$_n$ de f.

17 En revenant à l'exponentielle, remarquer qu'il suffit de déterminer un équivalent de $\ln f\Big(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\Big)$.

Pour cela essayer d'écrire $f\Big(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\Big)$ sous la forme $1+u(x)$ avec $u(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ afin d'utiliser l'équivalent de $\ln(1+u)$ en 0.
La formule de Taylor-Young en 0 et les hypothèses faîtes sur f conduisent à : $f(u)\underset{u\to 0}{=}1-\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$.

Il suffit ensuite de substituer u par $\dfrac{a}{\sqrt{x}}$.

On trouve : $\ln f\Big(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\Big)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\dfrac{a^2}{2x}$.

Réponse : $f\Big(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\Big)^x\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}e^{-\frac{a^2}{2}}$

18 **1.** Appliquer le TVI strictement monotone.

2. Il y a une méthode classique (savoir-faire SF 8) qu'il suffit de suivre à la lettre . *Réponse :*

$$f^{-1}(y)\underset{y\to 1}{=}0+(y-1)+\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3+o\big((y-1)^3\big)$$

19 **1.** Appliquer le TVI strictement monotone pour prouver l'existence de f^{-1}.
Ensuite l'existence du DL découle de la formule de Taylor-Young.
L'imparité de f^{-1} fait que le DL ne comporte que des puissances impaires.

2. Suivre le savoir-faire SF 8.
Réponse : $f^{-1}(y)\underset{y\to 0}{=}y-\dfrac{y^3}{2}+\dfrac{17}{24}y^5+o\big(y^5\big)$

20 Procéder par analyse-synthèse. Dans l'analyse, si f est solution du problème :

- Montrer que $f(0)=0$ ou 1
- Se ramener en 0 en remarquant que $f(x)=f\Big(\dfrac{x}{\sqrt{2}^n}\Big)^{2^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
- Si $f(0)=0$, montrer que f est nulle en exploitant sa continuité en 0 pour la majorer par $\dfrac{1}{2}$ au voisinage de 0 (par exemple).
- Si $f(0)=1$, montrer que $f'(0)=0$ puis former un DL$_2$ de f en 0 à l'aide de la formule de Taylor-Young pour montrer que $f\Big(\dfrac{x}{\sqrt{2}^n}\Big)^{2^n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^{ax^2}$ où $a=f''(0)$.

Réponse. Les solutions sont la fonction nulle et les fonctions $x \mapsto e^{ax^2}$.

21

22 *Réponses à trouver*

a) $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en 0^- donc pas de limite en 0

b) $\frac{1}{3}$

c) $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en 0^- donc pas de limite en 0

d) 1.

e) $e^{\frac{1}{2}}$

f) 1.

23 *Réponses à trouver*

a) -1

b) $-\frac{e}{2}$

c) $e^{-\frac{1}{6}}$

d) $\frac{8}{9}$

e) $-\frac{1}{4}$

24 *Réponses à trouver*

a) $\dfrac{3}{2n^{\frac{3}{2}}}$.

Commencer par montrer que $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

et : $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

pour en déduire un équivalent de $v_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n} - \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ puis de Arctan v_n.

b) $\dfrac{\sqrt{n}\ln n}{4}$.

Commencer par montrer que

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} - \frac{\ln n}{2n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$$

et : $\dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$ pour en déduire un équivalent de $v_n = \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} - \dfrac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ puis de $\sin v_n$.

25 Commencer par montrer que :

$$\left\lfloor n^{\frac{n+1}{n}} \right\rfloor \sim n \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(n^3+6n^2)^{\frac{1}{6}} - \sqrt{n}}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

puis en déduire un équivalent de : $u_n = \left\lfloor n^{\frac{n+1}{n}} \right\rfloor \operatorname{th} v_n$ (distinguer les cas : $\alpha < -\frac{1}{2}$ $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\alpha > -\frac{1}{2}$)

Réponse.

- Si $\alpha < -\dfrac{1}{2}$: $u_n \sim n$
- Si $\alpha = -\dfrac{1}{2}$: $u_n \sim n \operatorname{th} 1$
- Si $\alpha > -\dfrac{1}{2}$: $u_n \sim \dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$

26 **1.** En réduisant au même dénominateur

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)(e^x-1) + ax(e^x-1) + bx\ln(1+x)}{x\ln(1+x)(e^x-1)} = \frac{N(x)}{D(x)}$$

Vu que $D(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$: $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow}$ ssi $N(x) = o(x^3)$.
Il suffit de faire un DL_3 de $N(x)$ et de chercher pour quelles valeurs de a et b les coefficients sont nuls.
On trouve :

$$N(x) = (1+a+b)x^2 + \frac{a-b}{2}x^3 + o(x^3)$$

Ainsi

$$f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -\frac{1}{2}$$

2. Chercher C tel que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} Cx^2$. L'équivalent de $D(x)$ exige un DL_5 de $N(x)$ pour $a = b = -\frac{1}{2}$, (le terme en x^4 doit lui aussi s'annuler), on trouve

$$N(x) = -\frac{1}{48}x^5 + o(x^5)$$

Donc $C = -\dfrac{1}{48}$.

27 Il s'agit d'utiliser le DL pour étudier la fonction, méthode classique (voir savoir faire SF 12)

1. Il convient de développer le numérateur à l'ordre 4, on obtient

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

2. Exploiter le DL :

- $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$
- $\dfrac{f(x)+\frac{1}{2}}{x} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}x + o(x^1) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$
- $f(x) - \left(-\frac{1}{2} + \dfrac{x}{3}\right) = -\dfrac{1}{4}x^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{4}x^2 \leq 0$
  Au voisinage de 0, la courbe est en dessous de sa tangente en 0.

28 Il s'agit d'utiliser un DL d'ordre au moins 2 pour étudier la fonction, méthode classique (voir savoir faire SF 12)

1. On trouve : $f(x) = 1 - x + \dfrac{2}{3}x^2 + o(x^2)$,
on conclut en suivant le savoir-faire SF 12.

2. On trouve : $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$,
on conclut en suivant le savoir-faire SF 12.

3. On trouve : $f(x) = -\dfrac{x}{6} + \dfrac{7}{360}x^3 + o(x^3)$,
on conclut en suivant le savoir-faire SF 12.

29 Poser $x = 1+h$ puis revenir à l'exponentielle

$$f(1+h) = e^{\frac{2+h}{1+h}\ln(1+h)}$$

Faire un DL_3 de $u(h) = \frac{2+h}{1+h}\ln(1+h)$ puis composer avec un DL_3 de exp.
On trouve :

$$f(x) = \underbrace{1 + 2(x-1)}_{\text{eqn. de la tgte}} \underbrace{-\frac{1}{2}(x-1)^3}_{\text{pt. d'inflexion}} + o\left((x-1)^3\right)$$

30 **1.** On trouve :

$$f(x) = ax - \left(a + \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} + a\right)x^3 + o(x^3)$$

2. Il y a un point d'inflexion ssi le coefficient de x^2 est nul *i.e.* $a = -2$ (car le coef de x^3 n'est pas nul pour cette valeur).

31 Suivre le savoir faire SF 11 : il s'agit surtout de calculer les limites de f et f' en 0.
Pour calculer ces limites, il n'est pas utile de chercher un DL de f, il s'agit seulement de trouver un équivalent du numérateur et du dénominateur pour f et f' puis de faire le quotient des équivalents (éventuellement utiliser les DL pour trouver un équivalent du numérateur).

1. On trouve

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

2. On trouve

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} = -\frac{x}{6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^4}{6}}{x^4} = -\frac{1}{6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}$$

32 On fait un DL en 0^+ de $g(h) = hf\left(\frac{1}{h}\right)$ puis on revient à x via $x = \frac{1}{h}$.

a) $f(x) = \underbrace{x + \frac{1}{2}}_{\text{eqn. asymp.}} + \underbrace{\frac{3}{8} \times \frac{1}{x}}_{\text{au-dessus}} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $f(x) = \underbrace{2x}_{\text{eqn. asymp.}} + \underbrace{-\frac{4}{3} \times \frac{1}{x}}_{\text{en dessous}} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $f(x) = \underbrace{\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1}_{\text{eqn. asymp.}} + \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \times \frac{1}{x}}_{\text{au-dessus}} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

33 Il s'agit de déterminer le signe de

$$f(x) - f(0) = f(x) - 1.$$

Il suffit donc de chercher un équivalent de $f(x) - 1$.
(autre façon de voir les choses, f a un extremum local ssi elle possède un tangente horizontale en 0 et ne traverse pas sa tangente ce que l'on peut voir sur un DL en 0).
En faisant des DL_3 on trouve $f(x) = 1 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

Donc : $\quad f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{2}{3}x^3$.

En particulier $f(x) - 1$ change de signe en 0 donc il n'y a pas d'extremum local en 0

34 Suivre le savoir faire SF 11 : il s'agit surtout de calculer les limites de g et g' en 0.
La limite de g ne pose pas problème : $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)$.
Pour calculer la limite de

$$g'(x) = \frac{(x-a)f'(x) - f(x)}{(x-a)^2} = \frac{N(x)}{(x-a)^2}$$

il s'agit de trouver un équivalent du numérateur $N(x) = (x-a)f'(x) - f(x)$.
Pour cela utiliser le formule de Taylor-Young pour obtenir :

- Un DL à l'ordre 2 pour f
- Un DL à l'ordre 1 pour f'

On obtient : $\quad N(x) = \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right)$

et : $\quad g'(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{2}f''(a)$.

35 **1. a)** Calculer u_1 puis procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Utiliser : $\quad u_n - 1 = \frac{u_{n-1}}{n}$. (la question a) assure que (u_{n-1}) est bornée).

2. $u_{n-1} \sim 1$ donc $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$.
La conclusion est une simple reformulation de l'équivalent en terme de négligeabilité ($u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$)

3. Procéder « pas à pas » :

- *Déterminer d'abord b en développant u_n à la précision $\frac{1}{n^2}$*

  En utilisant $u_{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$:

  $$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

  Puis noter que $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

- *Déterminer ensuite c en développant u_n à la précision $\frac{1}{n^3}$*

  En utilisant $u_{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)^2}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

  $$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

  Montrer alors que :

  - $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$
  - $\frac{1}{n(n-1)^2} = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Réponse : $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

36 **1.** A n fixé, appliquer le TVI strictement monotone à f_n sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. La suite (u_n) est décroissante.
Pour cela calculer $f_{n+1}(u_n)$, on trouve $f_{n+1}(u_n) = u_n$.
Donc $f_{n+1}(u_n) > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.
La suite u converge donc vers $\ell \geq 0$.
Montrer que $\ell = 0$ en prenant la limite dans l'égalité $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.

3. a) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{u_n^5}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Montrer que $u_n - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{n^6}$, utiliser $u_n - \frac{1}{n} = -\frac{u_n^5}{n}$ et l'équivalent de u_n^5.

37 **1.** A n fixé, appliquer le TVI strictement monotone à $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$ sur $[0,1]$.

2. La suite (x_n) est décroissante. Pour cela calculer $f_{n+1}(x_n)$ et montrer : $\quad f_{n+1}(x_n) \leq 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$.
Conclure à l'aide de la stricte décroissance de f_{n+1}.
La suite (x_n) converge donc vers $\ell \geq 0$.
Montrer que $\ell = 0$ en prenant la limite dans l'égalité $x_n^n - nx_n + 1 = 0$.

3. a) Vu que $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: $\quad x_n = \frac{1}{n} - \frac{x_n^n}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Calculer nx_n^n en revenant à l'exponentielle.

c) Il suffit de montrer que $x_n^n \sim \frac{1}{n^n}$ (il est bien sûr interdit d'élever à la puissance n l'équivalent $x_n \sim \frac{1}{n}$). Pour cela revenir à l'exponentielle : $\quad x_n^n = \exp(n \ln x_n)$ puis montrer que $n \ln x_n = -n \ln n + o(1)$ en commençant par utiliser $x_n = \frac{1}{n}\left(1 + x_n^n\right)$ puis le résultat de la question b).

38 **1.** A n fixé, former le tableau de variation de f_n (dériver deux fois).
L'égalité demandée est donnée par la relation $f_n'(x_n) = 0$.

2. La suite (x_n) est croissante.
Pour cela calculer $f_{n+1}'(x_n)$, on trouve $f_{n+1}'(x_n) = -1$.
Donc $f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$.

La suite (x_n) tend vers l'infini ou possède une limite finie ℓ.
Procéder par l'absurde en prenant la limite dans l'égalité $e^{x_n} + 2x_n = n$.

3. a) $n = e^{x_n} + 2x_n$ et $2x_n = o(e_n^x)$.

b) $e^{x_n} = n - 2x_n$ donc :

$$x_n = \ln(n - 2x_n) = \ln n + \ln\left(1 - 2\frac{x_n}{n}\right) = \ln n + \varepsilon_n$$

Il suffit de montrer que $\varepsilon_n = o(\ln n)$. En fait on peut montrer que $\varepsilon_n \to 0$ à l'aide de l'équivalent de $\ln(1+u)$

c) Il s'agit de montrer que $x_n - \ln n \sim -2\frac{\ln n}{n}$.
Or : $\quad x_n - \ln n = \ln\left(1 - 2\frac{x_n}{n}\right)$
Utiliser alors l'équivalent de $\ln(1 + u)$ et celui de x_n.

4. a) $m_n = f_n(x_n) = e^{x_n} + x_n^2 - nx_n$.
Il suffit de comparer chacun des trois termes *i.e.* de trouver « le plus gros » des trois entre e^{x_n}, x_n^2 et $-nx_n$.
Les équivalents trouvés permettent de voir que e^{x_n} et x_n^2 sont des $o(n \ln n)$ et que $-nx_n \sim -n \ln n$.

b) Il s'agit de montrer que $m_n + n \ln n = n + o(n)$.
Pour cela : $\quad m_n + n \ln n = f_n(x_n) = e^{x_n} + x_n^2 - n(\ln n - x_n)$.
Il suffit de comparer chacun des trois termes *i.e.* de trouver « le plus gros » des trois entre e^{x_n}, x_n^2 et $-n(\ln n - x_n)$. Les équivalents trouvés permettent de voir que x_n^2 et $-n(\ln n - x_n)$ sont des $o(n)$ et que $e^{x_n} \sim n$.