Comparaison de suites et de fonctions

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer quelle fonction est négligeable devant l'autre au point indiqué.

a) $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$.

b) $f : x \mapsto x^{\ln x}$ et $g : x \mapsto x^x$ en $+\infty$.

c) $f : x \mapsto x^{\ln x}$ et $g : x \mapsto x^x$ en 0.

2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [1, +\infty]$, on pose : $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$.
Etablir : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$ et $(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\big(f(x)\big)$

3 Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Vrai ou Faux ?
a) $u_n \sim v_n \implies u_n - v_n \to 0$ **b)** $u_n - v_n \to 0 \implies u_n \sim v_n$
c) $u_n - v_n \to 0 \iff e^{u_n} \sim e^{v_n}$

4 On note f la fonction $x \mapsto xe^x$.
1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. On note W sa fonction réciproque. Montrer que :
a) $W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$ **b)** $W(x) - \ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln(\ln x)$.

5 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{\sqrt{x}} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 1$
Trouver un équivalent simple de f en 0.

Application des équivalent usuels

6 SF 1 Trouver un équivalent simple de chaque expression :

a) $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$ **b)** $\dfrac{x^4+x+2}{\lfloor x\rfloor^2+x-5}$ en $+\infty$ **c)** $\sin\left(\dfrac{\pi}{n^2}\right)$

d) $e^{\frac{1}{n}} + 8 + \dfrac{3}{n^2}$ **e)** $\dfrac{\sin x \ln(1+x)}{x \tan x}$ en 0 **f)** $\dfrac{5^x - 1}{\sin x}$ en 0

g) $\ln(1+x) + \cos x$ en $+\infty$ **h)** $\sqrt{n}^n + n^{\sqrt{n}}$

i) $\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} a$ en $a > 0$ **j)** $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ en π

7 SF 1 Trouver un équivalent simple de chaque expression :

a) $\sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$ **b)** $\dfrac{\ln(n^6+3)}{6n+1}$ **c)** $e^{e^{e^{-n}}} - e$

d) $\dbinom{n+k}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$ **e)** $(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}$ **f)** $e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}}$

g) $e^{-\frac{1}{n}}\left(\cos\dfrac{1}{n} - n^{-\frac{1}{n}}\right)$ **h)** $n\ln(n+1) - (n+1)\ln n$

i) $\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{-\ln n} - 1$ **j)** $\dfrac{\ln(\ln n) - (\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{n})^3 - (\frac{1}{3})^n}$

Calculs de développements limités

8 SF 2 SF 3 Calculer le développement limité à l'ordre **[n]** (spécifié dans chaque cas) en 0 :

a) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch}(2x) - \operatorname{ch} x$ **[3]** **b)** $(1-\cos x)^2$ **[6]** **c)** $\cos^5 x$ **[4]**

d) $\operatorname{Arctan} 2x + \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ **[5]**

9 SF 5 SF 4 Calculer le développement limité à l'ordre **[n]** (spécifié dans chaque cas) en 0 :

a) $\dfrac{\cos x}{1+\ln(1+x)}$ **[3]** **b)** $\ln(1+\sin x)$ **[3]** **c)** $\operatorname{th} x$ **[3]**

d) $e^{\sqrt{\cos x}}$ **[2]** **e)** $\ln(1+e^x)$ **[3]** **f)** $\dfrac{x^2}{x-\ln(1+x)}$ **[2]**

g) $(\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}}$ **[3]** **h)** $\dfrac{\operatorname{Arctan} x - \ln(1+x)}{\sin(3x)}$ **[3]**

10 SF 6 Calculer le développement limité à l'ordre **[n]** en 0 :
a) $\operatorname{Arccos} x$ **[5]** **b)** $\operatorname{Arctan}(e^x)$ **[3]** **c)** $\displaystyle\int_0^x e^{\sqrt{1+t}}\,dt$ **[3]**

11 SF 7 Calculer le développement limité à l'ordre **[n]** en 0 :
a) En $a = \dfrac{\pi}{4}$: $\sin x$ **[3]** **b)** En $a = 2$: $\sqrt{x}$ **[2]**
c) En $a = 1$: $\dfrac{\ln x}{x}$ **[3]** **d)** En $a = \dfrac{\pi}{1}$: $e^{\sin x}$ **[2]**

12 SF 4 SF 6 Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. Calculer le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right)$.
2. Calculer son développement limité à l'ordre $n+1$ en 0.

13 SF 6 Soit $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que : $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{x\to0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k}x^k + o(x^n)$
2. En déduire un développement limité de Arcsin en 0 à l'ordre $2n+1$.

14 SF 1 SF 2 Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on pose : $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p$
1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$.
En calculant de deux manières différentes le développement limité à l'ordre n en 0 de $f : x \mapsto (e^x - 1)^n$ montrer :
$$S_{n,0} = \cdots = S_{n,n-1} = 0 \quad\text{et}\quad S_{n,n} = (-1)^n n!$$
2. En affinant la méthode de la question précédente, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_{n,n+1} = (-1)^n \dfrac{n(n+1)!}{2}$

15 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $f(x) = \begin{cases} x + x^3\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\end{cases}$
Montrer que f possède un développement limité d'ordre 2 en 0 mais que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Utilisation de la Formule de Taylor-Young

16 Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Etablir :
$$f(x) \underset{x\to0}{=} o(x^n) \iff f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$$

17 SF 1 SF 10 Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = -1$.
Etudier l'existence et la valeur de : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^x$

18 SF 8
a) Montrer que $f : x \mapsto e^x - x^2$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
b) Montrer que f^{-1} possède un développement limité d'ordre 3 en 1 et le calculer.

19 SF 8
a) Montrer que $f : x \mapsto x\operatorname{ch} x$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
b) Justifier que f^{-1} possède un développement limité d'ordre 5 en 0 de la forme $f^{-1}(y) = a_1y + a_3y^3 + a_5y^5 + o(y^5)$.
c) Calculer a_1, a_3 et a_5.

20 SF 10 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x)^2 = f(\sqrt{2}x)$.

21 On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et F l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit T une application de E dans F vérifiant :

i) Pour tous $f,g \in E$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$: $\quad T(\lambda f+\mu g)=\lambda T(f)+\mu T(g)$.

ii) Pour tous $f\in E$ et $a\in]0,1[$, si f possède un extremum local en a, alors $T(f)(a)=0$.

Montrer qu'il existe $\varphi\in F$ tel que $T(f)=\varphi f'$ pour tout $f\in E$

Limites et équivalents

22 SF 1 SF 9 SF 7 SF 10 Etudier les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{\tan x - x}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{sh} x}{x(\cos x-\operatorname{ch} x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3 x}$ **d)** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{1}{\ln\sin x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}(2+\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$ **f)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sin x)^{\sin x}-x^x}{x^{\sin x}-(\sin x)^x}$

23 SF 1 SF 9 SF 10 Etudier la limite de la suite (u_n)

a) $u_n=\dfrac{\ln(n+1)-\ln(n+2)}{\sin\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)}$ **b)** $u_n=n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-ne$

c) $u_n=\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ **d)** $u_n=\left(3\times 2^{\frac{1}{n}}-2\times 3^{\frac{1}{n}}\right)^n$

e) $u_n=\sqrt{n^4+3n^3}-2\sqrt{n^4+2n^3}+\sqrt{n^4+n^3}$

24 SF 1 SF 9 Trouver un équivalent simple de u_n :

a) $u_n=e^{\frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}-\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\right)$

b) $u_n=\dbinom{n}{2}\sin\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}-\dfrac{\ln n}{\sqrt{n+1}}\right)$

25 SF 1 SF 9 SF 10 Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$u_n=\left\lfloor n^{\frac{n+1}{n}}\right\rfloor \operatorname{th}\left(\frac{(n^3+6n^2)^{\frac{1}{6}}-\sqrt{n}}{n^\alpha}\right)$$

Trouver un équivalent simple de u_n.

26 SF 1 SF 5 SF 9 Soit $a,b\in\mathbb{R}$ et $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{\ln(1+x)}+\dfrac{b}{e^x-1}$.

1. ★★ Trouver un condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que $f(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$.
2. ★★★ Montrer qu'alors f possède un maximum local en 0.

Applications à l'étude de fonctions

27 SF 12 On considère la fonction f définie pour tout $x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par : $\quad f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

1. Calculer le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
2. En déduire que f peut être prolongée par continuité en 0, et que ce prolongement est dérivable en 0. Déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en ce point.

28 SF 12 SF 5 SF 4 Etudier localement au voisinage de 0 la fonction f (prolongement par continuité, dérivabilité du prolongement en 0, équation de la tangente en 0, position relative) :

a) $f:x\mapsto\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$ **b)** $f:x\mapsto(\operatorname{ch}x)^{\frac{1}{x}}$ **c)** $f:x\mapsto\dfrac{1}{\operatorname{sh}x}-\dfrac{1}{x}$

29 SF 12 SF 4 SF 7 Calculer le développement limité de $f:x\mapsto x^{1+\frac{1}{x}}$ à l'ordre 3 en 1. Qu'en déduit-on sur $\mathscr{C}_f$?

30 SF 12 SF 5 Soit $a\in\mathbb{R}^*$. On note f la fonction $x\mapsto\dfrac{\ln(1+ax)}{1+x}$.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de f en 0.
2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.

31 SF 1 SF 9 SF 11

1. Montrer que $f:x\mapsto\dfrac{x}{e^x-1}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

32 SF 13 SF 3 Montrer que $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ et déterminer leur position relative au voisinage de $+\infty$:

a) $f:x\mapsto\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ **b)** $f:x\mapsto(x^2-1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

c) $f:x\mapsto\dfrac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}x$

33 SF 2 On note f la fonction $x\mapsto(1+x)^2+\cos x-\operatorname{ch}x-2\tan x$. La fonction f possède-t-elle un extremum local en 0 ?

34 SF 1 SF 9 SF 11 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$ et $a\in I$ tel que $f(a)=0$. Montrer que $g:x\mapsto\dfrac{f(x)}{x-a}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I

Développements asymptotiques de suites

35 On pose $u_0=1$ puis pour tout $n\geq 1$: $\quad u_n=1+\dfrac{u_{n-1}}{n}$.

1. **a)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad 1\leq u_n\leq 2$.
   b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
2. Déterminer un réel a tel que $u_n-1\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{a}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
3. ★★★ Trouver $b,c\in\mathbb{R}$ tels que $u_n=1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n^2}+\dfrac{c}{n^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

36 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n:x\mapsto x^5+nx-1$

1. Montrer que pour tout entier n, il existe un unique réel strictement positif u_n tel que $f_n(u_n)=0$.
2. Montrer que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.
3. **a)** Montrer que $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$.
   b) Montrer que $u_n\underset{n\to+\infty}{=}\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^6}+o\left(\dfrac{1}{n^6}\right)$.

37

1. Montrer que pour tout $n\geq 2$, l'équation $x^n-nx+1=0$ possède une unique solution dans $[0,1]$, notée x_n.
2. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.
3. Etablir :
   a) $x_n\sim\dfrac{1}{n}$ **b)** $x_n^n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ **c)** $x_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^{n+1}}+o\left(\dfrac{1}{n^{n+1}}\right)$.

38 Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n:x\mapsto e^x+x^2-nx$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que f_n possède un minimum m_n atteint en un unique réel x_n vérifiant $x_n\geq 0$ et : $e^{x_n}+2x_n=n$.
2. Montrer que (x_n) admet $+\infty$ pour limite.
3. Etablir :
   a) $e^{x_n}\sim n$ **b)** $x_n\sim\ln n$ **c)** $x_n=\ln n-2\dfrac{\ln n}{n}+o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.
4. Etablir : **a)** $m_n\sim -n\ln n$ **b)** $m_n=-n\ln n+n+o(n)$.