1 **a)** On cherche les racines complexes de A puis on regroupe les facteurs conjugués :

- *Racines complexes de A :* Ce sont les racines sixièmes de -27 à savoir : $\sqrt{3}e^{\pm i\frac{\pi}{6}}$, $\pm\sqrt{3}i$ et $\sqrt{3}e^{\pm i\frac{5\pi}{6}}$
- *Factorisation* $A = (X^2-3X+3)(X^2+3)(X^2+3X+3)$.

b) On cherche les racines complexes de B puis on regroupe les facteurs conjugués :

- *Racines complexes de B :* $e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$, et $-e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$
- *Factorisation* $B = (X^2-X+1)(X^2+X+1)$.

c) Utiliser l'identité remarquable a^2-b^2 :
$C = (X^2-X+1)^2 - i^2 = \big(X^2-X+(1-i)\big)(X^2-X+1+i)$
Il suffit alors de chercher les racines de chacun des deux trinôme du second degré.
Factorisation. $C = (X^2-2X+2)(X^2+1)$

2 **a)** On cherche les racines complexes de A puis on regroupe les facteurs conjugués :

- *Racines complexes de A :* Ce sont les racines $2n^{\text{e}}$ de l'unité à savoir les $e^{ik\frac{\pi}{n}}$ pour $k\in[\![0,2n-1]\!]$.
- *Factorisation* $A = (X-1)(X+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X^2-2\cos\tfrac{k\pi}{n}X+1)$

b) On cherche les racines complexes de B puis on regroupe les facteurs conjugués :

- *Racines complexes de B :* Ce sont les racines $2n+1^{\text{e}}$ de -1 à savoir les $e^{i\theta_k}$ avec $\theta_k = \frac{\pi}{2n+1} + \frac{2ik\pi}{n+1}$ pour $k\in[\![0,2n]\!]$.
- *Factorisation* $B = (X+1)\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X^2-2\cos\theta_k X+1)$

c) On cherche les racines complexes de C puis on regroupe les facteurs conjugués :

- *Racines complexes de C :* Ce sont les racines n^{e} de $e^{\pm i\theta}$ à savoir les $e^{\pm i\frac{\theta}{n}+\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$.
- *Factorisation* $C = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X^2-2\cos\tfrac{\theta+2k\pi}{n}X+1)$

3 Constater que i est racine double.
P est à coefficients réels donc $-i$ est aussi racine double.
Ainsi P est divisible par $(X-i)^2(X+i)^2 = (X^4+2X^2+1)$.
En posant la division
$P = (X^4+2X^2+1)(X^2+X+1) = (X-i)^2(X+i)^2(X^2+X+1)$

4 Calculer P'' : ses racines sont $\pm 2i$.
On constate que $2i$ est aussi racine de P et P'.
La forme scindée de P est $P = (X-2i)^3(X-z)$ et on peut utiliser les relations entre coefficients et racines pour calculer z (la somme des racines est nulle). On obtient $z=-6i$.

5 **1.** On cherche les racines complexes de P puis on regroupe les facteurs conjugués :

- *Racines complexes de P :* $e^{\pm 2i\frac{\pi}{9}}$, $e^{\pm 8i\frac{\pi}{9}}$ et $e^{\pm 4i\frac{\pi}{9}}$
- *Factorisation*

$$P = (X^2-2\cos\frac{2\pi}{9}X+1)(X^2-2\cos\frac{4\pi}{9}X+1)(X^2-2\cos\frac{8\pi}{9}X+1)$$

2. Notant $\alpha = \cos\frac{2\pi}{9}$, $\beta = \cos\frac{4\pi}{9}$ et $\gamma = \cos\frac{8\pi}{9}$

$$\begin{aligned}Q &= (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)\\ &= X^3-(\alpha+\beta+\gamma)X^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X-\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

Il s'agit de calculer explicitement les valeurs de :
$\sigma_1 = \alpha+\beta+\gamma$, $\sigma_2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ et $\sigma_3 = \alpha\beta\gamma$
Pour cela, développer le membre de droite dans l'égalité :
$X^6+X^3+1 = (X^2-2\alpha X+1)(X^2-2\beta X+1)(X^2-2\gamma X+1)$
et exprimer les coefficients de X^5, X^4 et X^3 en fonction de σ_1, σ_2 et σ_3.

6 **1.** P est de degré 6.

2. Utiliser $1+j+j^2=0$. et j aussi.

3. On constate que j est racine double.
P est à coefficients réels donc j^2 est aussi racine double.
On constate que 0 et -1 sont aussi racines.
On dispose des 6 racines de P, son coefficient dominant vaut 7 :
$P = 7X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2 = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$

7 Par l'algorithme d'Euclide : $A\wedge B = X-2$.

8 Par l'algorithme d'Euclide étendu on trouve :

$$A\frac{X+2}{5} + B\frac{-X^2-2X+1}{5} = 1$$

9
- Si $A\wedge B = 1$, montrer que $A+B$ est premier avec A et avec B (pour l'une des trois méthodes usuelles).
- Si $(A+B)\wedge AB = 1$, on peut montrer que $A\wedge B = 1$ par exemple à l'aide du théorème de Bézout ou en montrant que $A\wedge B$ divise 1.

10 Ecrire $C = QB$ puis utiliser le lemme de Gauss pour montrer que A divise Q.

11 **1.** Par contraposition, si $\alpha\in\mathbb{C}$ est racine de P d'ordre au moins deux alors $X-\alpha$ divise P et P'.

2. Par contraposition : si $P\wedge P'\neq 1$, alors ils possèdent un diviseur commun $R\in\mathbb{C}[X]$ de degré au moins 1.
Une racine complexe de R (il en existe d'après d'Alembert-Gauss) est une racine de P d'ordre au moins 2.

12 Supposer que P divise AB et ne divise pas A et montrer que P divise alors B en appliquant le lemme de Gauss.

13
- $i) \implies ii)$ Factoriser A et B par $D = A\wedge B$ puis former une combinaison linéaire nulle à partir de ces factorisations.
- $ii) \implies i)$ Procéder par l'absurde et utiliser le lemme de Gauss pour montrer que $A\mid V$.

14 Factoriser A et B par $A\wedge B$ puis diviser la relation de Bézout par $A\wedge B$.

15 **1.** Comme pour l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$, il y a trois possibilités :

- *Option 1.* Ecrire une relation de Bézout entre P et Q pour en déduire une relation de Bézout entre $P+iQ$ et $P-iQ$.
- *Option 2* A l'aide de la propriété de conservation : « $A\wedge B = B\wedge A-BQ$ » on parvient à transformer $P-iQ\wedge P+iQ$ en $P\wedge Q$.
- *Option 3* On pose $D = P+iQ\wedge P-iQ$ et on montre que $D\mid P$ et $D\mid Q$ par combinaisons linéaires.

2. Par hypothèse, $(X-a)^2$ divise $P^2+Q^2=(P+iQ)(P-iQ)$. Utiliser alors le lemme de Gauss puis utiliser le lien entre multiplicité et racine des polynômes dérivés.

16 **1.** Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$: $P=\lambda\prod_{i=1}^{k}(X-z_i)^{m_i}$ et observer que $P\wedge P'=\prod_{i=1}^{k}(X-z_i)^{m_i-1}$

2. Les deux ensembles sur lesquels P et Q coïncident sont disjoints, montrer que la somme de leurs nombres d'éléments est strictement supérieure à $\deg P$ (et à $\deg Q$).

17 *Réponses*

a) $F_1=1-\dfrac{8}{X-1}+\dfrac{13}{X-2}$

b) $F_2=\dfrac{-1}{X+1}+\dfrac{X+3}{X^2+2X+3}$

c) $F_3=4X-4+\dfrac{7}{X+1}-\dfrac{2}{(X+1)^2}+\dfrac{1}{X-1}$

d) $F_4=\dfrac{2}{X}-\dfrac{1}{X^2}+\dfrac{-\frac{3}{2}}{X+1}-\dfrac{1}{(X+1)^2}+\dfrac{-\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}}{X^2+1}$.

e) $F_5=\dfrac{3}{X^2+4}+\dfrac{7X-11}{(X^2+4)^2}$.

18 *Réponse* : $F=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{X+k}$.

19 1 est pôle double, les autres pôles sont les $\omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$.

La DES est de la forme :

$$F=\frac{\alpha_1}{X-1}+\frac{\alpha_2}{(X-1)^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\beta_k}{X-\omega_k}$$

- La formule du cours « $\alpha=\frac{P'(a)}{Q(a)}$ » pour les pôles simples donne $\beta_k=\dfrac{\omega_k}{n(\omega_k-1)}$.
- Le cache en $(X-1)^2$ donne $\alpha_2=\dfrac{1}{n}$.
- Pour α_1, en multipliant la DES par $(X-1)$ puis en retranchant $\dfrac{\frac{1}{n}}{X-1}$ on constate que

$$\alpha_1=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x^n-1}-\frac{\frac{1}{n}}{x-1}\right)$$

Or pour $x\neq1$:

$$\frac{1}{x^n-1}-\frac{\frac{1}{n}}{x-1}=\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}x^k}-\frac{1}{n}\right)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

où $f:x\mapsto\dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}x^k}$.

Ainsi $\alpha_1=f'(1)=\dfrac{1-n}{2n}$.

20 F est la D.E.S. de $\dfrac{P}{Q}$ où :

- $Q=\prod_{k=0}^{n-1}X-\omega_k=X^n-1$
- $\deg P\leq n-1$

Pour trouver P utiliser le fait que $\dfrac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k)}=\dfrac{\omega_k^2}{n}$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$.

On trouve que $P(\omega_k)=\omega_k$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, ce qui assure que $P=X$ (raisonner sur le nombre de racines de $P-X$).

Réponse $F=\dfrac{X}{X^n-1}$.

21 **1.** La fraction $F=\dfrac{1}{XP(X)}$. La DES de $F=\dfrac{1}{XP(X)}$ est de la forme : $\dfrac{1}{XP(X)}=\dfrac{\alpha_0}{X}+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{X-a_i}$.

- Calculer α_0 par la méthode du cache.
- Calculer les α_i pour $i\in[\![1,n]\!]$ en utilisant la formule du cours pour les pôles simples : $\alpha_i=\dfrac{1}{Q'(a_i)}$ où $Q(X)=XP(X)$.

2. Le résultat découle de ce que $xF(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

22 Considérer la fraction $F=\dfrac{X^k}{P}$.

Sa DES est donnée par : $\dfrac{X^k}{P}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{X-z_i}$ où $\alpha_i=\dfrac{z_i^k}{P'(z_i)}$.

Le résultat découle de ce que $xF(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

23 **1.** La résolution de l'équation $\cos(n\theta)=0$ d'inconnue $\theta\in\mathbb{R}$ permet de trouver n racines distinctes de la forme $\cos(\theta_0),\dots,\cos(\theta_{n-1})$ pour T_n. Ce sont les seules puisque $\deg T_n=n$.

2. La DES est donnée par :

$$\frac{1}{T_n}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_k}{X-\cos\theta_k}$$

où $\alpha_k=\dfrac{1}{T_n'(\cos\theta_k)}$.

Pour calculer $T_n'(\cos\theta_k)$, dériver la relation vérifiée par T_n.

Solution : $\dfrac{1}{T_n}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}}{X-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$.

24

25 **a)** Utiliser la DES $\dfrac{2}{X^2-1}=\dfrac{1}{X-1}+\dfrac{1}{X+1}$

On trouve : $S_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

b) Utiliser la DES $\dfrac{2}{X(X+1)(X+2)}=\dfrac{1}{X}-\dfrac{2}{X+1}+\dfrac{1}{X+2}$:

On trouve : $T_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}$

26

a) Utiliser la DES $\dfrac{1}{(X-a)(X-b)}=\dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{X-a}-\dfrac{1}{X-b}\right)$

On trouve : $f^{(n)}=x\mapsto\dfrac{(-1)^n n!}{a-b}\left(\dfrac{1}{(x-a)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-b)^{n+1}}\right)$

b) $\operatorname{Arctan}'=f$ où $f:x\mapsto\dfrac{1}{(x-i)(x+i)}$.

Il suffit d'appliquer le résultat de la première question avec $a=i$, $b=-i$ au rang $n-1$

$$\mathrm{Arctan}^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right)$$

c) On cherche les racines complexes de P :
Ce sont les solutions de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$, exercice classique sur les nombres complexes.

Les racines sont les $z_k = \dfrac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

les racines sont toutes réelles donc P est scindé sur $\mathbb{R}$:

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$$

où λ est le coefficient dominant de P, à savoir le coefficient de X^{n-1}.
En développant $(X+i)^n$ et $(X-i)^n$ on trouve $\lambda = 2ni$.

d) Il suffit de réduire au même dénominateur dans l'expression trouvée au $b)$:

$$\mathrm{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i} \frac{P(x)}{(x^2+1)^n}$$

il reste alors à injecter la factorisation de P.

27 *Réponses*

a) • *D.E.S* : $\dfrac{10}{(X^2+9)(X+1)} = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{-X+1}{X^2+9}$.

• *Intégrale.* $I(x) = \ln(1+x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+9) + \ln 3 + \dfrac{1}{3}\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{3}$

• *Limite.* $I(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{6} - \ln 3$.

b) • *Intégrale*. En posant $u = t^2$ dans l'intégrale :

$$I(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) - \ln\frac{3}{5}$$

• *Limite.* $I(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln\dfrac{3}{5}$.

c) • *D.E.S* : $\dfrac{2X+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} = \dfrac{-X+2}{X^2+1} + \dfrac{X-1}{X^2+X+1}$.

• *Intégrale.*

$$I(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 2\,\mathrm{Arctan}\,x + \frac{1}{2}\ln(1+x+x^2) - \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\frac{\pi}{6}$$

• *Limite.* $I(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pi - \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

d) • *D.E.S* :

$$\frac{25}{(X+1)^2(X^2-2X+2)} = \frac{4}{X+1} + \frac{5}{(X+1)^2} + \frac{-4X+7}{X^2-2X+2}$$

• *Intégrale.*

$$I(x) = 4\ln(1+x) - \frac{5}{1+x} - 2\ln(x^2-2x+2) + 2\ln 2 + 3\,\mathrm{Arctan}(x-1) + \frac{3\pi}{4}$$

• *Limite.* $I(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ln 2 + \dfrac{9\pi}{4}$.

28 *Réponses*

a) • *D.E.S* : $\dfrac{X^4}{X^2+2X+5} = X^2 - 2X - 1 + \dfrac{12X+5}{X^2+2X+5}$.

• *Primitive.* $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x^2 - x + 6\ln(x^2+2x+5) - \dfrac{7}{2}\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x+1}{2}$

b) • *D.E.S* : $\dfrac{6}{X^4+X^2-2} = \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{X+1} - \dfrac{2}{X^2+2}$.

• *Primitive.* $x \mapsto \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

c) • *D.E.S* : $\dfrac{3X}{X^3+1} = -\dfrac{1}{X+1} + \dfrac{X+1}{X^2-X+1}$.

• *Primitive.*

$$x \mapsto -\ln|1+x| + \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

d) • *D.E.S*

$$\frac{X^3}{(X^2-1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{X-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{X+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{(X+1)^2}$$

• *Primitive.*

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1}$$

e) –

29 *Réponses*

a) • *Changement de variable :* $I = \displaystyle\int_0^{\cos x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$

• *D.E.S* : $\dfrac{1}{X^2-1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{X+1}$.

• *Intégrale.* $I = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$

b)

c) • *Changement de variable :* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}$

• *D.E.S* : $\dfrac{4}{(1-X^2)^2} = -\dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{(X-1)^2} + \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{(X+1)^2}$.

• *Intégrale.* $I = \ln 3 + \dfrac{4}{3}$

30

1. Ecrire $P^2(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^k P(t)$ dans l'intégrale.

2. Remarquer que $F(i) = \displaystyle\int_0^1 t^i P(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

3. Vu les pôles, le degré et les zéros trouvés pour F, sa mise au même dénominateur est de la forme

$$F = \frac{\lambda(X-1)\dots(X-n)}{(X+1)\dots(X+n+1)}$$

Par la méthode du cache : $a_0 = (-1)^n\lambda(n+1)$.

Reste à exprimer λ en fonction de $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour cela, remarquer que $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = F(0)$.

31 Considérer $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ et calculer $\dfrac{P'(1)}{P(1)}$.

Réponse : $\dfrac{n-1}{2}$.

32 Si $a_1, \dots, a_k$ sont les racines (toutes réelles) de P de multiplicités $m_1, \dots m_k$ le cours donne : $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{X-a_i}$

En dérivant : $\dfrac{P''P-(P')^2}{P^2} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{(X-a_i)^2}$.

Il suffit d'évaluer l'expression en $x \in \mathbb{R}$ (en traitant à part le cas où x est une racine de P, cas pour lequel le résultat demandé est immédiat)

33 Procéder par l'absurde. En évaluant $\dfrac{P'}{P}$ en 0 il est possible de montrer que $\dfrac{a_1}{a_0} \leq -n$.