Factorisations

1 SF 7 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :
a) $A = X^6+27$. **b)** $B = X^4+X^2+1$ **c)** $C = (X^2-X+1)^2+1$

2 SF 7 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:
a) $A = X^{2n}-1$ **b)** $B = X^{2n+1}+1$
c) $C = X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$ où $\theta \in]0,\pi[$

3 SF 7 Factoriser $X^6+X^5+3X^4+2X^3+3X^2+X+1$ dans $\mathbb{R}[X]$
Indication : Commencer par vérifier que i est racine.

4 SF 7 Montrer que $P = X^4+24X^2-64iX-48$ possède une racine triple et le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$.

5 SF 6 SF 7 **1.** Factoriser $P = X^6+X^3+1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire, explicitement, le polynôme Q unitaire admettant pour racines $\cos\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$ et $\cos\frac{8\pi}{9}$.

6 SF 7 **1.** Quel est le degré de $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$?
2. a) Vérifier que j est racine de P.
b) Déterminer la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$

Arithmétique des polynômes

7 SF 9 Calculer $A \wedge B$ où $A = X^5+3X^4-4X^3-12X^2-7X+14$ et $B = X^4+4X^3-X^2-13X-18$.

8 SF 10 Trouver une relation de Bézout entre les polynômes

$$A = X^3+2 \quad \text{et} \quad B = X^2+1$$

9 Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, $A+B$ et AB le sont.

10 Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. A l'aide du théorème de Gauss, montrer que si $A \mid C$ et $B \mid C$ et si $A \wedge B = 1$, alors $AB \mid C$.

11 **1.** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si P et P' sont premiers entre eux, alors P n'a que des racines simples dans $\mathbb{K}$.
2. Montrer que la réciproque est vraie si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

12 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible et soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si $P \mid AB$ alors $P \mid A$ ou $P \mid B$.

13 Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, non nuls. Montrer qu'il y a équivalence entre :

i) A et B ne sont pas premiers entre eux.

ii) Il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$, non nuls tels que

$$AU + BV = 0, \quad \deg U < \deg B \quad \text{et} \quad \deg V < \deg A$$

14 Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, non nuls.
Soient $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que : $AU + BV = A \wedge B$.
Montrer que U et V sont premiers entre eux.

15 SF 4 Soit $a \in \mathbb{C}$ et soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, premiers entre eux.
On suppose que a est racine double de P^2+Q^2.
1. Montrer que $P+iQ$ et $P-iQ$ sont premiers entre eux.
2. En déduire que a est racine de $(P')^2+(Q')^2$.

16 SF 9 Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, non constants.
1. Montrer que P possède exactement $\deg(P) - \deg(P \wedge P')$ racines distinctes dans $\mathbb{C}$.
2. On suppose que :
- $\{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}$
- $\{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 1\}$

Montrer que $P = Q$

Décompositions en éléments simples

17 SF 11 SF 12 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

a) $F_1 = \dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$ **b)** $F_2 = \dfrac{2X}{(X+1)(X^2+2X+3)}$

c) $F_3 = \dfrac{4X^4}{(X+1)(X^2-1)}$ **d)** $F_4 = \dfrac{X^3-1}{X^2(X^2+1)(X+1)^2}$

e) $F_5 = \dfrac{3X^2+7X+1}{(X^2+4)^2}$

18 SF 11 SF 12 Soit $n \in \mathbb{N}$.
Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F = \frac{n!}{X(X+1)(X+2)\dots(X+n)}$$

On fera apparaître des coefficients du binôme.

19 SF 11 SF 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$.

Formule « $\frac{P(a)}{Q'(a)}$ » pour les pôles simples

20 SF 12 Soit $n \geq 2$. On note $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ les racines n^e de l'unité. Réduire sous la forme $\dfrac{P}{Q}$ la fraction $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^2}{X-\omega_k}$.

21 SF 11 SF 12 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$ possédant n racines distinctes $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ non nulles.
a) Décomposer $\dfrac{1}{XP(X)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$
b) En déduire l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k P'(a_k)} = -\frac{1}{P(0)}$.

22 SF 11 SF 12 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 2$ scindé à racines simples $z_1, \dots, z_n$. Montrer : $\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^k}{P'(z_i)} = 0$

23 SF 6 SF 11 SF 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admet l'existence d'un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et pour lequel :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

1. Déterminer les racines réelles de T_n.
2. Décomposer $\dfrac{1}{T_n}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

24 SF 12 Soit $n \geq 2$.
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*$ tous distincts et $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{\omega x_k - x_j}{x_k - x_j} = 0$

   pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$

2. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{q x_k - q^{-1} x_j}{x_k - x_j} = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$

Applications en analyse

25 SF 11 Soit $n \geq 1$. Calculer :

a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2 - 1}$ **b)** $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$

26 SF 11 SF 6 **1.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$.

Calculer la dérivée d'ordre n de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$.

2. En déduire une expression de $\operatorname{Arctan}^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $P = (X+i)^n - (X-i)^n$ dans $\mathbb{C}[X]$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x :

$$\operatorname{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} n!}{(x^2+1)^n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - \frac{\cos \frac{k\pi}{n}}{\sin \frac{k\pi}{n}} \right)$$

27 SF 14 Calculer $I(x)$ pour $x > 1$ puis étudier $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} I(x)$:

a) $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{10}{(t^2+9)(t+1)} \, \mathrm{d}t$ **b)** $I(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{4t}{t^4 - 1} \, \mathrm{d}t$

c) $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2t+1}{(t^2+1)(t^2+t+1)} \, \mathrm{d}t$ **d)** $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{25 \, \mathrm{d}t}{t^4 - t^2 + 2t + 2}$

28 SF 14 Déterminer les primitives de chacune des fonctions :

a) $x \mapsto \dfrac{x^4}{x^2 + 2x + 5}$ **b)** $x \mapsto \dfrac{6}{x^4 + x^2 - 2}$ **c)** $x \mapsto \dfrac{3x}{x^3 + 1}$

d) $x \mapsto \dfrac{x^3}{(x^2-1)^2}$. **e)** $x \mapsto \dfrac{x^4 + x^3 - 1}{x^3 + x^2 + x}$.

29 SF 14 Calculer les intégrales suivantes à l'aide des changements de variable proposés :

a) Pour $x \in]0, \pi[$, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin \theta}$ (poser $t = \cos \theta$)

b) $\displaystyle\int_0^x \frac{\cos^3 \theta}{4 + \sin^2 \theta} \, \mathrm{d}\theta$ (poser $t = \sin \theta$)

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4}{\cos^3 \theta} \, \mathrm{d}\theta$ (poser $t = \sin \theta$)

30 SF 12 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \int_0^1 t^k P(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

On note $a_0, \dots, a_n$ les coefficients de P : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

1. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 P^2(t) \, \mathrm{d}t = a_0 \int_0^1 P(t) \, \mathrm{d}t$
2. On pose : $F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{X + k + 1}$.

   Montrer que les entiers $1, 2, \dots, n$ sont des zéros de F.
3. En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 P^2(t) \, \mathrm{d}t = (n+1)^2 \left(\int_0^1 P(t) \, \mathrm{d}t \right)^2$.

   Indication : On pourra commencer par réduire F au même dénominateur.

Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$

31 SF 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. En utilisant la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ pour un polynôme P bien choisi , calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega^k}$

32 SF 13 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x)P(x)'' - P'(x)^2 \leq 0$.

33 SF 13 Existe-t-il une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels non nuls tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ soit scindé sur $\mathbb{R}$ à racines dans $[0, 1]$?