1 **1.** Vérifier que A est un sous-anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ c'est à dire :

i) A possède I_2

ii) A est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+)$, précisément que pour tous $M,N \in A$:

- $M+N \in A$ (stabilité par +)
- $-M \in A$ (stabilité par passage à l'opposé).

iii) A est stable par produit.

2. Il s'agit de trouver chercher les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ telles que : $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ **et** $M^{-1} \in A$.

Réponse. $U(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; b \in \mathbb{Z} \right\}$.

2 **1.** Vérifier que A est un sous-anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ c'est à dire :

i) A possède I_2

ii) A est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+)$, précisément que pour tous $M,N \in A$:

- $M+N \in A$ (stabilité par +)
- $-M \in A$ (stabilité par passage à l'opposé).

iii) A est stable par produit.

Vérifier ensuite que toute matrice $M \in A$ non nulle est inversible et que $M^{-1} \in A$.

2. Vérifier que φ est un morphisme d'anneaux *i.e.* :

- $\varphi(1) = I_2$
- $\varphi(z+z') = \varphi(z) + \varphi(z')$ pour tous $z,z' \in \mathbb{C}$
- $\varphi(zz') = \varphi(z) \times \varphi(z')$ pour tous $z,z' \in \mathbb{C}$

Ensuite montrer que φ est un bijectif. Pour cela montrer que φ est surjectif puis montrer que φ est injectif (en montrant que $\operatorname{Ker}\varphi$ est réduit à 0).

3. $M = \varphi(z)$ et procéder par équivalence dans les deux cas en utilisant l'injectivité de φ pour traduire l'équation sur M en une équation sur z.

a) On trouve que $M^2 = -I_2$ équivaut à $z^2 = -1$. Il suffit de résoudre cette dernière équation et de calculer les matrices M qui correspondent aux solutions.

Solutions : $\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) On trouve que $M^n = I_n$ équivaut à $z^n = 1$.

Solutions : $\begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}$ pour $k \in [\![0\,,n-1]\!]$.

3 **1.** Vérifier que A est un sous-anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ c'est à dire :

i) A possède I_2

ii) A est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+)$, précisément que pour tous $M,N \in A$:

- $M+N \in A$ (stabilité par +)
- $-M \in A$ (stabilité par passage à l'opposé).

iii) A est stable par produit.

Vérifier ensuite que $MN = NM$ pour toutes $M,N \in A$.

2. A n'est pas un corps s'il existe $M = \begin{pmatrix} a & nb \\ b & a \end{pmatrix}$ non nulle (*i.e.* $(a,b) \neq (0,0)$) et non inversible (*i.e.* $a^2 - nb^2 = 0$).

- Si $n = p^2$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$, il suffit de construire (en fonction de p) un couple (a,b) qui vérifie les deux conditions précédentes
- Pour la réciproque, si un tel couple (a,b) existe, alors $n = x^2$ où $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Il s'agit de montrer que x est entier. Ecrire x sous forme irréductible $x = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$. Le fait que $x^2 \in \mathbb{N}$ assure que $q^2 \mid p^2$ mais on sait aussi que $p^2 \wedge q^2 = 1$.

4 Vérifier que pour tous $x,y \in \mathbb{R}$: $M(x)M(y) = M(x+y)$. En déduire que :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x) \in GL_3(\mathbb{R})$.
- $\varphi : x \mapsto M(x)$ est un morphisme.

Cela prouvera que $\mathscr{G} = \operatorname{Im}\varphi$ est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$. Reste à vérifier que φ est injectif en montrant que $\operatorname{Ker}\varphi$ est réduit à 0 pour assurer que $x \mapsto \varphi(x)$ est un isomorphisem de $\mathbb{R}$ sur $\mathscr{G}$.

5 Attention : ici G n'est pas un sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ (aucune des matrices de G n'est d'ailleurs inversible). Il faut donc revenir à la définition :

- Vérifier que $\times$ est une L.C.I. *i.e.* que si $A,B \in G$ alors $A \times B$ est un élément de G.
- L'associativité est déjà acquise pour $\times$ donc n'est pas à vérifier.
- Vérifier l'existence d'un élément neutre *i.e.* d'une matrice E de G pour laquelle $A \times E = E \times A = A$ pour toute $A \in G$.
- Vérifier l'existence d'un « inverse » pour toute matrice $A \in G$ *i.e.* une matrice $B \in G$ telle que $A \times B = B \times A = E$.

6 Utiliser les règles de calcul avec la transposée pour observer que $(AB)^\top = BA$.

7 Etant données $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ stochastiques, utiliser la définition du produit pour montrer que si $AB = (c_{i,j})$:

- les coefficients $c_{i,j}$ sont positifs
- $\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = 1$ pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$.

8 **1.** Utiliser la définition du coefficient du produit pour calculer $(DM)_{i,i}$ et $(MD)_{i,i}$.

2. La question 1 montre une inclusion. Pour l'inclusion réciproque commencer par observer que $(DM-MD)_{i,j} = (d_i - d_j)m_{i,j}$ et en déduire une matrice M pour que $DM - MD = A$.

9 Procéder par analyse-synthèse :

- *Pour l'analyse.* Si A commute avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors, en particulier $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ pour tous $i,j \in [\![1\,,n]\!]$. Calculer $AE_{i,j}$ (la seule colonne éventuellement non nulle est en position j) et $E_{i,j}A$ (la seule ligne éventuellement non nulle est en position i). L'identification du coefficient en position (i,j) impose $a_{i,i} = a_{j,j}$ et les autres coefficients montrent que la i^{e} ligne et la j^{e} colonne de A sont nulles en dehors des coefficients diagonaux. En d'autres termes $A = \lambda I_n$ où $\lambda = a_{1,1} = \cdots = a_{n,n}$.
- *Ne pas oublier la phase de synthèse.*

10 **1.** Pour toute matrice $M \in \mathscr{I}$ et tous $k,\ell \in [\![1\,,n]\!]$, montrer que $E_{i,k}ME_{\ell,j} = m_{k,\ell}E_{i,j}$.

2. Toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire des $E_{i,j}$: $\quad A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, E_{i,j}$.

11 **1.** Poser $T = AB$ et montrer que $t_{i,j} = 0$ si $j < i+p+q$. Utiliser la définition du produit pour calculer $t_{i,j}$ et séparer la somme au niveau de l'indice $k = i+p$.

2. Itérer le résultat de **1.** : $T^2 \in \mathscr{N}_2$, $T_3 \in \mathscr{N}_3, \ldots, T_n \in \mathscr{N}_n$ et comprendre concrètement la forme des matrices de $\mathscr{N}_2$, $\mathscr{N}_3$ et surtout de $\mathscr{N}_n$.

12 Procéder par récurrence sur n.
Pour l'hérédité, étant donnée T de taille $n+1$ triangulaire supérieure, écrire T par blocs sous la forme

$$T = \begin{pmatrix} x & L \\ 0 & \widetilde{T} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad T^\top = \begin{pmatrix} x & 0 \\ L^\top & \widetilde{T}^\top \end{pmatrix}$$

où L est une matrice ligne et $\widetilde{T} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure Calculer $T^\top T$ et $TT^\top$ et observer les coefficients « diagonaux ».

13 Plusieurs possibilités :

- *Méthode 1 : par récurrence*. On montre par récurrence la propriété « Il existe $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = \alpha_n I_3 + \beta_n A$. » (pour l'hérédité constater que $A^2 = A + 2I_3$.)
- *Méthode 2 : Avec la formule du binôme*. On écrit $A = J - I_3$ où J est la matrice pleine de 1 puis on obtient par la formule du binôme une expression de A^n de la forme $A^n = \lambda_n I_3 + \mu_n J$ qui donne le résultat demandé en utilisant $J = A + I_3$.
- *Méthode 3 : Avec un polynôme annulateur*. Par le calcul on voit que $P(X) = X^2 - X - 2$ annule A. Il suffit d'évaluer la division euclidienne de X^n par P pour obtenir le résultat.

14 Plusieurs possibilités :

- *Méthode 1 : par récurrence*. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad A^p = 2^{p-1}(I_n + A)$.
- *Méthode 2 : Avec la formule du binôme*. On écrit $(A+I_n)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}A^k$ puis sachant que $A^{2\ell} = I_n$ et $A^{2\ell+1} = A$, il suffit de séparer la somme entre indices pairs et impairs.
- *Méthode 3 : Avec un polynôme annulateur*. Par hypothèse $P(X) = X^2 - 1$ annule A et il suffit alors d'évaluer la division euclidienne de $(X+1)^n$ par P pour obtenir le résultat.

15 Procéder par récurrence.
On trouve $a_{n+1} = -2a_n + 3$ et donc (suite arithmético-géométrique), $a_n = 1 - (-2)^n$.

16 A est diagonale par blocs : $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix}$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
donc $A^n = \begin{pmatrix} M^n & 0 \\ 0 & (-1)^n M^n \end{pmatrix}$.
Il reste à calculer les puissances de M.

Réponse : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & (-1)^{n+1}n \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

17 On écrit $A = I_2 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ vérifie $N^2 = 0$ donc la formule du binôme se réduit à

$$A^{100} = I_2 + 100N = \begin{pmatrix} 401 & -400 \\ 400 & -399 \end{pmatrix}$$

18 On écrit $A = 3I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $N^3 = 0$ puis on utilise le formule du binôme.
Réponse : $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$*, pour $n \geq 2$ et on s'aperçoit que la formule est encore vraie pour $n = 0$ et $n = 1$*

19 **1.** *Puissances de A*. On écrit $A = I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$ puis on utilise le formule du binôme.
On trouve : $A^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$ pour $n \geq 2$ et on s'aperçoit que la formule est encore vraie pour $n = 0$ et $n = 1$

2. *Racine carrée de A*. L'idée est de tester $n = \frac{1}{2}$ dans la formule trouvée ci-dessus. Précisément on prend $B = I_3 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$ et on constate par le calcul de B^2 que $B^2 = A$.

3. *Racine énième de A*.
De même on vérifie que la matrice $B = I_3 + \frac{1}{n}N - \frac{n-1}{2n^2}N^2$ convient. Pour le calcul de B^n, utiliser la formule du binôme constatant que $M = \frac{1}{n}N - \frac{n-1}{2n^2}N^2$ vérifie $M^2 = \frac{1}{n^2}M$ et $M^3 = 0$.

20 **1.** Utiliser la formule du binôme.
Réponse : $A^n = \frac{1}{4^n}I_3 + \frac{4^n-1}{3\times 4^n}J$

2. Les matrices colonnes $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ vérifient $X_{n+1} = AX_n$ d'où l'on tire $X_n = A^n X_0$.
Réponse : $u_n = v_n = \frac{4^n-1}{3\times 4^n}$ *et* $w_n = \frac{4^n+2}{3\times 4^n}$

21 Commencer par montrer que $B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1} \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

22 **1.** P est de déterminant non nul.
On trouve $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Sans calcul : $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice diagonale).
Puis $A^n = PD^nP^{-1} = \frac{4^n}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Les matrices colonnes $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ vérifient $X_{n+1} = AX_n$ d'où l'on tire $X_n = A^n X_0$.
Réponse : $u_n = \frac{4^{n+1}-1}{3}$ *et* $v_n = \frac{2\times 4^n+1}{3}$

23 **1.** $A^2 - 10A + 21I_3 = 0$.

2. $A \times \frac{-A+10I_3}{21} = I_3$

3. $P(X) = X^2 - 10X + 21$ est annulateur de A. Il suffit d'évaluer en A la division euclidienne de X^n par $P(X)$.
Réponse : $A^n = \frac{7^n - 3^n}{4}A + \frac{7\times 3^n - 3\times 7^n}{4}I_3$

24 Effectuer la division euclidienne de $X^5 + X - 1$ (qui annule A) par $X^2 + X + 1$ puis évaluer cette division euclidienne en A. *Réponse :* $B^{-1} = \frac{A^3 - A^2 + I_3}{2}$

25 Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de B. Utiliser alors $AA^{-1} = A^{-1}A$.

26 **1.** $(I_n+M)(M^2-M^3) = 0$ impose $M^2-M^3 = 0$ en multipliant par $(I_n+M)^{-1}$ à gauche.

2. On trouve $(X+1)(\frac{X^2}{2} - X + 1) + (-X^3 + X) \times \frac{1}{2} = 1$.
Il suffit d'évaluer en M.

27 *Réponses*

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) B n'est pas inversible.

c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) D est inversible ssi aucun des réels α, β ou γ n'est nul et

dans ce cas $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} & -\frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\gamma} \\ -\frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta} & 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ -\frac{1}{\gamma} & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$

28 Chercher M' sous la forme $M' = \begin{pmatrix} A' & C' \\ 0 & B' \end{pmatrix}$ telle que $MM' = I_{2n}$ en faisant le produit par blocs.
On trouve $M' = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

29 **1.** Si A était inversible le cours nous apprend que A^p le serait aussi.

2. Penser à la factorisation géométrique de $I - A^p$.

30 **1.** $M(a) = M(1) + (a-1)I_n$.

2. $M(1)^2 = nM(1)$, il suffit alors de calculer $M(a)^2$ à partir de l'égalité de la question 1.

3. L'égalité de la question 2 permet d'écrire
$M(a)\times\big(M(a)-(2a-2+n)I_n\big) = \lambda I_n$ avec $\lambda = (a-1)(1-n-a)$

31 **1.** Avec la définition du produit on obtient : $(A\overline{A})_{p,q} = \begin{cases} n & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}$ *i.e.* $A\overline{A} = nI_n$.

2. $A^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A}$.

32 Le calcul pour des petites valeurs de p semble montrer que $M^p + M^{-p} = \lambda_p I_n$.
On peut le montrer par récurrence double sur p en utilisant :
$M^p + M^{-p} = (M^{p+1} + M^{-p-1}) + (M^{p-1} + M^{-(p-1)})$
Réponse : $M^p + M^{-p} = 2\cos\frac{p\pi}{3} I_n$

33 Commencer par le cas où AB est nilpotente.

34 **1. a)** $MA = M^3$ et $AM = M^3$.

b) $M^4 = 0$.

2. Par analyse-synthèse.

Si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{S}$ alors l'égalité $MA = AM$ et le fait que $ad - bc = 0$ impose $a = b = d = 0$.

Les seuls candidats solutions sont les $M = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On constate qu'ils ne sont jamais solutions : $\mathscr{S} = \varnothing$.

35 **1.** $A^{-1} = A^{p-1}$.

2. $(P^{-1}AP)^p = P^{-1}A^pP$.

3. Procéder par double inclusion en commençant dans chaque cas par traduire explicitement quelle est l'hypothèse de départ sur A et ce que l'on cherche à montrer.

36 **1.**
- Il n'est pas difficile de vérifier que toute matrice antisymétrique est solution.
- *Réciproquement* si M est solution d'($\star$) :
  - *Dans le cas où* $s(A) = 2$.
    Appliquer s à l'égalité $M + M^\top = s(A)M$ pour montrer que $s(M) = 0$.
  - *Dans le cas où A est antisymétrique.*
    Procéder par l'absurde : si $s(M) \neq 0$, on peut exprimer A en fonction de M.

2.
- Commencer par vérifier que toute matrice de la forme $N + \lambda A$ est solution.
- *Réciproquement si M est solution d'*($\star$).
  Poser $N = M - \lambda A$ et chercher λ tel que $N + N^\top = 0$.
  On trouve que $\lambda = \dfrac{s(N)}{2}$ convient.