Groupes et anneaux de matrices

1 On pose : $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

1. Montrer que A est un anneau pour les lois d'addition et de multiplications des matrices.
2. Déterminer $U(A)$.

2 On pose : $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} ; x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que A est un corps pour les lois d'addition et de multiplications des matrices.
2. Montrer que l'application $\varphi : z \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}$ dans A est un isomorphisme d'anneaux.
3. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $M \in A$:
   a) $M^2 = -I_2$ **b)** $M^n = I_2 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

3 Soit $n \in \mathbb{Z}$, fixé. On pose : $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & nb \\ b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
2. Montrer que A n'est pas un corps si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = p^2$.

4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On pose : $\mathcal{G} = \{M(x) ; x \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$, isomorphe à $\mathbb{R}$. *Indication : Considérer l'application $\varphi : x \mapsto M(x)$*

5 On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 et on pose : $G = \{\lambda J ; \lambda \in \mathbb{R}^*\}$. Montrer que G est un groupe pour la multiplication des matrices.

Exercices abstraits autour du produit

6 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques. Montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$.

7 Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsque :

i) Tous les coefficients de A sont positifs ou nuls.

ii) La somme des coefficients de chaque ligne de A vaut 1.

Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.

8 Soient $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$, tous distincts. On note D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les coefficients diagonaux de la matrice $DM - MD$ sont tous nuls.
2. Montrer que $\{DM - MD\,,\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$ est exactement l'ensemble des matrices de diagonale nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9 Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

10 Soit $\mathcal{I}$ un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$, non réduit à $\{0\}$ et tel que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall M \in \mathcal{I}, \quad AMB \in \mathcal{I}$$

1. Montrer que $E_{i,j} \in \mathcal{I}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.
2. En déduire que $\mathcal{I} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

11 Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{N}_p$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $a_{i,j} = 0$ si $j < i + p$.

1. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que pour toutes $A \in \mathcal{N}_p$ et $B \in \mathcal{N}_q$: $AB \in \mathcal{N}_{p+q}$.
2. Que peut-on en déduire pour les matrices de $\mathcal{N}_1$?

12 Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer que T commute avec sa transposée si, et seulement si, la matrice T est diagonale.

Puissances d'une matrice carrée

13 SF 1 On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n est une combinaison linéaire de I_3 et A

14 SF 1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = I_n$. Exprimer $(I_n + A)^p$ comme une combinaison linéaire de A et I_n

15 On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{pmatrix}$$

En déduire une expression de A^n.

16 SF 1 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

17 SF 1 On pose : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^{100}.
Indication : Considérer $N = A - I_2$ et utiliser la formule du binôme.

18 SF 1 On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
A l'aide de la formule du binôme, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

19 SF 1 On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
3. ★★★ Plus généralement, pour tout $n \geq 2$, trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^n = A$.

20 SF 1 SF 3 On pose : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \frac{1}{4}(I_3 + J)$.

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par : $u_0 = v_0 = 0$, $w_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 2v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases}$$
Calculer les valeurs de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

21 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, trouver une expression de $P(B)$ en fonction de $P(A)$ et $P'(A)$.

Autour du calcul de l'inverse

22 SF 1 SF 2 SF 3 On pose : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer $D = P^{-1}AP$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer D^n puis en déduire une expression explicite de A^n.
3. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$
Déterminer une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

23 SF 1 SF 2 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -10 & 5 & 6 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 10A + 21I_3$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
3. Avec **1.**, montrer l'existence de deux suite (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = a_nA + b_nI_3$
4. Calculer a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

24 SF 2 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A = I_n$. Montrer que $B = A^2 + A + I_n$ est inversible et calculer B^{-1}.

25 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + I_n$.
Montrer que A et B commutent.

26 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = M^4$.

1. Montrer que si $I_n + M$ est inversible, alors $M^2 = M^3$.
Indication : Calculer $(I_n + M)(M^2 - M^3)$
2. Montrer que si $M^2 = M^3$, alors $I_n + M$ est inversible.
Indication : Trouver deux polynômes $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $(X+1)U + (-X^3 + X^2)V = 1$.

27 SF 2 Les matrices suivantes sont elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \gamma+1 \end{pmatrix}$

$(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$

28 SF 2 Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, A et B étant inversibles. Montrer que la matrice par bloc $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A, B, A^{-1}, B^{-1} et C.

29 SF 2 Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$ (on dit que A est nilpotente d'indice p).

1. Montrer que A n'est pas inversible.
2. Montrer que $I - A$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

30 SF 2 Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, exprimer $M(a)$ comme une combinaison linéaire de $M(1)$ et de I_n.
2. Calculer $M(1)^2$ puis montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$:
$$M(a)^2 = (n - 2 + 2a)M(a) + (1-a)(n+a-1)I_n$$
3. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 1-n\}$, $M(a)$ est inversible et préciser alors son inverse. Qu'en est-il si $a = 1$ ou $a = 1 - n$?

31 SF 2 Soit $n \geq 1$, on pose :

$$\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} \quad \text{et} \quad A = \left(\omega^{(p-1)(q-1)}\right)_{1\leq p,q\leq n}$$

1. Calculer $A\overline{A}$ ($\overline{A}$ désignant la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A).
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

32 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, telle que $M + M^{-1} = I_n$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer $M^p + M^{-p}$.

33 SF 2 Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que si $I_n - AB$ est inversible, alors $I_n - BA$ l'est aussi.

Equations à inconnue matricielle

34 On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on s'intéresse à l'ensemble $\mathscr{S}$ des matrices $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

1. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $M^2 = A$.
   a) Montrer que $MA = AM$.
   b) Montrer que M n'est pas inversible.
2. Trouver tous les éléments de $\mathscr{S}$.

35 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on pose : $\mathscr{R}_n(p) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^p = I_n\}$.

1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{R}_n(p)$.
Montrer que : $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et que : $A^{-1} \in \mathscr{R}_n(p)$.
2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{R}_n(p)$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$.
Montrer que : $P^{-1}AP \in \mathscr{R}_n(p)$.
3. Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. On note d le PGCD de p et q.
Montrer que : $\mathscr{R}_n(p) \cap \mathscr{R}_n(q) = \mathscr{R}_n(d)$.

36 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour toute $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on note $s(M)$ la somme des coefficients de M. On cherche toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $(\star)$ $M + M^\top = s(M)A$

1. Montrer que si A n'est pas symétrique ou si $s(A) \neq 2$ les solutions d'$(\star)$ sont toutes les matrices antisymétriques.
2. On suppose que A est symétrique et que $s(A) = 2$.
Montrer que les solutions d'$(\star)$ sont toutes les matrices de la forme $N + \lambda A$ où N est une matrice antisymétrique et $\lambda \in \mathbb{R}$.