Coefficients, degré

1 Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2n}{k}=\binom{3n}{n}$.

2 Soit $n\in\mathbb{N}$ et $k\in[\![0,n]\!]$.

1. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{i=k}^{n}X(X+1)^i=(X+1)^{n+1}-(X+1)^k$
2. En déduire l'égalité : $\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$.

3 SF 1 Résoudre les équations d'inconnue $P\in\mathbb{K}[X]$:
a) $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$ **b)** $P\circ P=P$.

4 SF 1 Résoudre les équations d'inconnue $P\in\mathbb{K}[X]$:
a) $(X^2+1)P''-6P=0$. **b)** $(X^2+1)P''-6P=-6$.

5 Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, non constant à coefficients entiers et $a,b\in\mathbb{Z}^*$ premiers entre eux tels que : $P\left(\frac{a}{b}\right)=0$.

1. Montrer que a divise le coefficient constant de P.
2. Plus généralement, montrer que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $a-kb$ divise $P(k)$.

Division euclidienne

6 SF 3 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ pour que (X^2+2) divise $X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$.

7 SF 2 Donner le reste de la division euclidienne :

a) de $X^{98}+2X-2$ par X^2-1
b) de $X^{98}+2X-2$ par $(X-1)^2$
c) de X^{101} par X^3-X^2-X+1
d) de $\left((\sin\theta)X+\cos\theta\right)^n$ par X^2+1 pour $n\geq 2$
e) de X^{2n} par $(X^2+1)^2$ pour $n\geq 2$

8 SF 3 Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}X^k$. Montrer que $P(X)$ divise $P(X^2)$.

Divisibilité et racines

9 SF 3 On pose : $P=X^{311}+X^{82}+X^{15}$
a) Montrer que $1+X+X^2$ divise P.
b) Le polynôme P est-il divisible par $(1+X+X^2)^2$?

10 SF 3 Soient $a,b\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si b divise a alors X^b-1 divise X^a-1.
2. Soit r le reste de la division de a par b. Montrer que X^r-1 est le reste de la division euclidienne de X^a-1 par X^b-1

11 SF 3 Soient $P\in\mathbb{C}[X]$ et $n\in\mathbb{N}$. Montrer que si $X-1$ divise le polynôme $P(X^n)$ alors X^n-1 divise $P(X^n)$.

12 SF 3 A quelle condition nécessaire et suffisante sur n le polynôme $X^{2n}+X^n+1$ est-il divisible par X^2+X+1.
Indication : Raisonner modulo 3 pour n.

Dérivation et racines multiples

13 SF 4 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Trouver la multiplicité de 1 dans le polynôme : $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$

14 SF 3 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $(X-1)^3$ divise le polynôme : $nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$.

15 SF 4 Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

16 Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ et $a\in\mathbb{R}$ tels que $P(a)>0$ et :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad P^{(k)}(a)\geq 0$$

Montrer que P ne possède pas de racines dans $[a,+\infty[$.

17 SF 1 Soit $n\geq 2$.

1. Soit $P\in\mathbb{C}[X]$, non constant, tel que : $(P')^n=P^{n-1}$. Montrer que toute racine complexe de P est de multiplicité n dans P
2. Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que : $(P')^n=P^{n-1}$.

18 SF 3 Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé.

Trop de racines !

19 SF 8 Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que :
a) $\forall x\in\mathbb{R},\quad P(x)=\lfloor x\rfloor$
b) $\forall x\in\mathbb{R},\quad P(x)=e^x$

20 SF 8 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose : $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Montrer que pour tous $x,y\in\mathbb{C}$: $\displaystyle x^n-y^n=\prod_{k=0}^{n-1}(x-\omega^k y)$.
2. En déduire que $\displaystyle P^n-Q^n=\prod_{k=0}^{n-1}(P-\omega^k Q)$ pour tous polynômes $P,Q\in\mathbb{C}[X]$.

21 SF 1 SF 8 Trouver tous les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(0)=0\qquad\text{et}\qquad P(X^2+1)=P(X)^2+1\,.$$

22 SF 8 Trouver tous les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ pour lesquels : $P(\mathbb{U})\subset\mathbb{U}$.

23 SF 8 Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, non constant à coefficients entiers.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ divise $P\big(n+P(n)\big)$.
2. On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $P(n)\in\mathbb{P}$. Montrer que ceci impose $P(X)=P\big(X+P(X)\big)$ puis prouver que cette égalité est impossible.

Polynômes de Lagrange

24 SF 8 On note $L_1,\dots,L_n$ les polynômes de Lagrange associés aux points $x_1=1,\dots,x_n=n$.

a) Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Calculer le coefficient dominant de L_i

b) Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{n-1}L_k=X^{n-1}$

c) Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k^n$.

25 Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P\in\mathbb{Z}[X]$ tel que $\deg(P)\leq n$.
On pose $\delta=P(0)\wedge\cdots\wedge P(n)$. Montrer que δ divise $P(k)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

Polynômes scindés

26 Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré $n\geq 2$.

a) Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, alors P' est scindé aussi scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

b) Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ alors P' l'est aussi.

27 SF 6 Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, scindé sur $\mathbb{R}$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$ ne possédant aucune racine de P. Montrer que $f:x\mapsto\ln|P(x)|$ est concave sur I.

28 SF 6 On pose $P=X^{100}+2X+3$ et on note $z_1,\dots,z_{100}$ les racines complexes de P (comptées avec multiplicités).

Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{100}(1+z_k^3)=26.$

29 SF 6 Soit $P,Q\in\mathbb{C}[X]$ deux polynômes unitaires non constants. On note $a_1,\dots,a_m$ les racines complexes de P et $b_1,\dots,b_n$ celles de Q (comptées avec multiplicités).

Montrer que les nombres : $A=\displaystyle\prod_{i=1}^{m}Q(a_i)$ et $B=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}P(b_i)$

sont égaux ou opposés.

30 SF 6 Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, unitaire de degré $n\in\mathbb{N}$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad |P(z)|\geq|\mathrm{Im}\,z|^n$$

31 SF 6 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}X^k$.

1. Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. Calculer $P'(\omega_k)$ où $\omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

2. En déduire : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}P'(\omega_k)=n^{n-2}$.

32 SF 6 Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{R}$. On pose $P=(X+1)^n-e^{2ina}$.

a) Calculer les racines de P dans $\mathbb{C}$.

b) En déduire la valeur du produit : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)$.

33 SF 6 Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré $n\in\mathbb{N}^*$.
On suppose que : $P(0)=0$ et $P'(0)=1$.
Montrer que pour tout $a\in\mathbb{C}$ tel que $|a|<\frac{1}{n}$, il existe $z\in\mathbb{C}$ tel que : $|z|<1$ et $P(z)=a$.

34 Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}_+^*$ tels que pour tous $\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}$, le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k a_k X^k$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Relations coefficients-racines

35 On pose $P=X^3-2X+5$, on note a,b,c ses racines complexes et on pose : $S_1=a^2+b^2+c^2$ et $S_2=a^4+b^4+c^4$.

1. a) Calculer S_1

b) Calculer S_2 à l'aide d'une division euclidienne.

2. Trouver un polynôme de degré 3 ayant pour racines a^2, b^2 et c^2.

36 SF 5 Résoudre le système (S) d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$:

a) $(S):\begin{cases}x+y+z=1\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\\ xyz=-4\end{cases}$ **b)** $(S):\begin{cases}x+y+z=1\\ x^2+y^2+z^2=1\\ x^3+y^3+z^3=-5\end{cases}$

37 SF 5 Soient $x,y,z\in\mathbb{C}$ tels que $x+y+z=0$ et $x^2+y^2+z^2=0$.
Montrer que le triplet (x,y,z) est proportionnel à $(1,j,j^2)$ ou $(1,j^2,j)$.

38 On pose $P=X^3-11X+12$

a) Montrer que P a exactement trois racines réelles notées a,b,c et que : $-4<a<-3$ et $1<b<2<c<3$

b) Montrer que : $\mathrm{Arctan}\,a+\mathrm{Arctan}\,b+\mathrm{Arctan}\,c=\frac{\pi}{4}$.

39 On note α,β,γ les racines dans $\mathbb{C}$ de $P=X^3+X+1$.
Montrer que le système

$$(S):\begin{cases}x+y+z=1\\ \alpha x+\beta y+\gamma z=1\\ \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2z=1\end{cases}$$

a un unique triplet $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$ solution donné par :

$$x=\frac{2+\alpha+\alpha^2}{3\alpha^2+1},\quad y=\frac{2+\beta+\beta^2}{3\beta^2+1},\quad z=\frac{2+\gamma+\gamma^2}{3\gamma^2+1}$$

40 Soient $a,b,c\in\mathbb{C}$. On pose : $P=X^3+aX^2+bX+c$.
On note z_1, z_2 et z_3 les racines complexes de P (comptées avec multiplicités).
Expliciter, en fonction de a,b,c un polynôme unitaire admettant : z_1+z_2, z_2+z_3 et z_3+z_1 pour racines.