1 Identifier le coefficient de X^n de chaque membre de l'égalité : $(X+1)^n(X+1)^{2n}=(X+1)^{3n}$.

2
1. Faire apparaître une somme télescopique en écrivant $X=(X+1)-1$.
2. Identifier le coefficient de X^{k+1} de chaque membre de l'égalité. Pour le membre de gauche commencer par développer $(X+1)^i$ avec la formule du binôme puis intervertir les deux sommes obtenues.

3 Procéder par analyse-synthèse pour trouver les solutions non nulles :

- Dans l'analyse, poser $n=\deg P$ puis identifier les degrés de chaque membre afin d'obtenir une équation sur n.
- Pour la synthèse, utiliser les équations pour former un système sur les coefficients du polynômes.

a) *Réponses* : $\mathrm{Vect}(X^2-1)$.
b) *Réponses* : Les polynômes constants et le polynôme X.

4 **a)** Procéder par analyse-synthèse pour trouver les solutions non nulles :

- Dans l'analyse, noter a le coefficient dominant de P et $n=\deg P$ puis identifier les coefficients dominants de chaque membre afin d'obtenir une équation sur n.
- Pour la synthèse, utiliser les équations pour former un système sur les coefficients du polynômes.

Réponses : $\mathrm{Vect}(X^3+X)$.

b) Déterminer une solution particulière puis montrer que les solutions sont la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène résolue au a).
Réponses : $1+\mathrm{Vect}(X^3+X)$.

5
1. En écrivant $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, multiplier $P\left(\frac{a}{b}\right)$ par b^n puis raisonner modulo a.
2. Appliquer le résultat de la question **1.** à $Q(X)=P(X+k)$.

6 Deux méthodes possibles :

- *Méthode 1.* On pose la division euclidienne et on calcule le couple (Q,R) de la division euclidienne de $A=X^4+X^4+\lambda X^2+\mu X+2$ par $B=X^2+2$.
  On cherche ensuite pour quelles valeurs de λ et μ tous les coefficients du reste R sont nuls.
- *Méthode 2.* Vu que $B=(X-\sqrt{2}i)(X+\sqrt{2}i)$, B divise A ssi $A(\sqrt{2}i)=0$ et $A(-\sqrt{2}i)=0$. Ces deux conditions fournissent un système d'inconnue (λ,μ).
  Réponse : $\lambda=3$ et $\mu=2$.

7 Suivre la méthode classique (cf savoir faire SF 2).
Réponses :
1. $2X-1$.
2. $100X-99$.
3. $50X^2+X-50$.
4. $\cos(n\theta)X+\sin(n\theta)$.
5. $(-1)^n(-nX^2+1-n)$.

8 Plusieurs possibilités :

- *Première possibilité : à l'aide de la factorisation géométrique .* Utiliser $X^{2n+1}-1=(X-1)P(X)$ et substituer X par X^2.
- *Deuxième possibilité : avec la factorisation de P .*
  Utiliser la forme factorisée de P à savoir $P=\prod_{k=1}^{2n+1}(X-\omega_k)$ où les ω_k sont les racines $(2n+1)^e$ de l'unité autre que 1. Il s'agit donc de montrer que pour tout $k\in[\![1,2n+1]\!]$, $P(\omega_k^2)=0$. Dit autrement il s'agit de montrer que pour tout $k\in[\![1,2n+1]\!]$: $\omega_k^2\in\mathbb{U}_{2n+1}$ et $\omega_k^2\neq1$

9 On note $P=X^{311}+X^{82}+X^{15}$.
a) Vu que $Q=(1+X+X^2)=(X-j)(X-\bar{j})$ et que P est à coefficients réels, Q divise P ssi $P(j)=0$.
On constate par le calcul que $P(j)=0$ en utilisant les propriétés usuelles sur j à savoir $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$.
b) $(X-j)^2(X-\bar{j})^2$ divise P ssi $P(j)=0$ et $P'(j)=0$. On constate ici que $P'(j)\neq0$.

10
1. Ecrire $a=bq$ et écrire $X^a-1=(X^b)^q-1$ puis utiliser la factorisation de a^q-1.
2. Ecrire $a=bq+r$ puis montrer que X^a-1 se met sous la forme $(X^b-1)Q+X^r-1$.
   Pour cela, faire apparaître X^r-1 dans X^a-1 :
   $$X^a-1=(X^b)^qX^r-1=\left((X^b)^q-1\right)X^r+X^r-1$$
   Factoriser $(X^b)^q-1$ par X^b-1 comme à la première question.

11 Traduire l'hypothèse ainsi que la conclusion à établir en terme de racines. Posant $Q(X)=P(X^n)$:

- L'hypothèse $X-1$ divise Q signifie que $Q(1)=0$.
- montrer que X^n-1 divise Q équivaut à montrer que $Q(\omega_k)=0$ pour tous les $\omega_k\in\mathbb{U}_n$.

Il suffit alors de calculer $Q(\omega_k)$ (utiliser le lien avec P).

12 $P=X^{2n}+X^n+1$ est divisible par $X^2+X+1=(X-j)(X-\bar{j})$ ssi $P(j)=0$ *i.e.* ssi $j^{2n}+jn+1$.
Raisonner alors modulo 3 pour n en utilisant le fait que si $n\equiv r\ [3]$ alors $j^n=j^r$.
On trouve que X^2+X+1 divise P ssi n n'est pas un multiple de 3.

13 Utiliser les dérivées de $P=nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$: on trouve : $P(1)=P'(1)=0$ et $P''(1)\neq0$.

14 Avec le cours il suffit de s'assurer que
$$P=nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$$
vérifie $P(1)=P'(1)=P''(1)=0$.

15 Procéder par l'absurde : si $a\in\mathbb{C}$ est une racine multiple de P, alors : $P(a)=0$ et $P'(a)=0$.
Obtenir une contradiction en exploitant : $P=\frac{X^n}{n!}+P'$

16 Ecrire P à l'aide de la formule de Taylor au point a puis évaluer en $x\geq a$.

17 **1.** Notant m la multiplicité de a dans P, exprimer la multiplicité de a dans chacun des deux membres $(P')^n$ et P^{n-1} puis identifier ces multiplicités.

2. Procéder par analyse-synthèse.
Dans l'analyse traiter à part le cas des polynômes constants.
Pour les polynômes non constant P solutions, l'identification des degrés de chaque membre permet de montrer qu'ils sont de degré n. Avec la question **1.** cela signifie qu'ils sont de la forme $\lambda(X-a)^n$. Déterminer λ à l'aide de l'équation.
Solutions : Le polynôme nul et $\dfrac{(X-a)^n}{n^n}$.

18 Procéder par analyse-synthèse.
Dans l'analyse traiter à part le cas des polynômes constants.
Pour un polynômes non constant P solution, en notant $a_1,\dots,a_k$ les racines distinctes de P' et $m_1,\dots,m_k$ leurs multiplicités montrer que $k=1$ en comparant les multiplicités de $a_1,\dots,a_k$ dans P et son degré.
On trouve que P est de la forme : $\quad P=\lambda(X-a)^n$.

19 **a)** Procéder par l'absurde. Si P convient, le polynôme $R=P-X$ possèderait une infinité de racines donc serait le polynôme nul et $P=X$.

b) Procéder par l'absurde. Si P convient, poser $n=\deg P$ et dériver $n+1$ fois.

20 **1.** Exploiter la factorisation : $\quad X^n-1=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} X-\omega^k$.

2. Compter le nombre de racines du polynôme
$$R(X)=P^n-Q^n-\prod_{k=0}^{n-1}(P-\omega^k Q)$$

21 Procéder par analyse-synthèse.
Dans la phase d'analyse, si P convient : $\quad P(0)=0$.
En évaluant $P(X^2+1)=P(X)^2+1$ en 0 on obtient $P(1)=1$.
En évaluant $P(X^2+1)=P(X)^2+1$ en 1 on obtient $P(2)=2$.
En évaluant $P(X^2+1)=P(X)^2+1$ en 2 on obtient $P(5)=5$.
En évaluant $P(X^2+1)=P(X)^2+1$ en 3 on obtient $P(9)=9$.
Il s'agit alors de montrer que $P(X)=X$ en montrant que le polynôme $R=P(X)-X$ possède une infinité de racines.
Pour cela, définir une suite par $u_0=0$ puis $u_{n+1}=u_n^2+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et montrer par récurrence que $P(u_n)=u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Il reste à montrer que $\{u_n\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ est infini.
Ne pas oublier la synthèse.

22 Trouver un polynôme Q tel que $P(z)Q(z)=z^n$ pour tout $z\in\mathbb{U}$.

23 **1.** Ecrire P sous la forme $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ pour certains $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{Z}$ et calculer $P\big(n+P(n)\big)$ modulo $P(n)$.

2. Noter que l'hypothèse, appliquée à l'entier $n+P(n)$, assure en particulier que $P\big(n+P(n)\big)$ est aussi un nombre premier pour tout $n\in\mathbb{N}$. Exploiter alors la question **1.** pour montrer que $P(n)=P\big(n+P(n)\big)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ puis que $P=P(X+P(X))$.

Trouver une contradiction en considérant les degrés.

24 **a)** On sait déjà que P' a au plus $n-1$ racines (complexes).
Il s'agit de montrer que P' a au moins $n-1$ racines réelles : appliquer le théorème de Rolle.

b) Montrer que P' possède au moins $n-1$ racines réelles comptées avec leur multiplicités. En notant $a_1<\dots<a_k$ les racines réelles de P et $m_1,\dots,m_k$ leurs multiplicités :

- D'une part, en adaptant la stratégie de la question précédente, montrer que P' possède $k-1$ racines réelles distinctes et distinctes de $a_1,\dots,a_k$
- D'autre part le cours assure que $a_1,\dots,a_k$ sont aussi racines de P' de multiplicités $m_1-1,\dots,m_k-1$.

25 **a)** A partir de la forme factorisée
$$L_i=\prod_{j\neq i}\frac{X-j}{i-j}=\frac{1}{\prod_{j\neq i} i-j}\prod_{j\neq i}(X-j)$$
Le coefficient dominant vaut
$$\frac{1}{(i-1)(i-2)\dots 1\times(-1)\times(-2)\times(i-n)}$$
Il reste à simplifier l'expression. *Réponse :* $(-1)^{n-i}\dfrac{i}{n!}\binom{n}{i}$.

b) Poser : $\quad P=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{n-1}L_k \quad$ et $\quad R=P-X^{n-1}$.
Noter que $\deg R\leq n-1$, il suffit de montrer que R a n racines pour montrer que R est nul.
Pour cela évaluer en les x_i.

c) Identifier le coefficient de X^{n-1} dans : $\quad\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{n-1}L_k=1$.

Réponse : $n!$.

26 Exprimer P en fonction des polynômes de Lagrange $L_0,\dots,L_n$ associés aux points $0,\dots,1$.

27 Ecrire P sous la forme $P(X)=\lambda\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)$ puis calculer f''.

28 Par définition des z_k : $\quad P(X)=\displaystyle\prod_{k=1}^{100}(X-z_k)$

Calculer alors le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{100}(z_k^3+1)$ en utilisant la factorisation $X^3+1=(X+1)(X+j)(X+j^2)$. On obtient :
$$\prod_{k=1}^{100}(z_k^3+1)=P(-1)P(-j)P(-j^2)$$
Il reste à calculer $P(-1)$, $P(-j)$ et $P(-j^2)$ à l'aide de l'expression explicite de P donnée par l'énoncé.

29 Calculer A et B en utilisant les formes scindées :
$$P=\prod_{k=1}^{m}(X-a_k)\quad\text{et}\quad Q=\prod_{k=1}^{n}(X-b_k)$$
On obtient : $\quad A=(-1)^{nm}B$.

30
- *Si P est scindé sur $\mathbb{R}$.* Ecrire P sous la forme $P=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)$ pour certains réels $a_1,\dots,a_n$ et vérifier que pour tout réel a et tout $z\in\mathbb{C}$: $\quad|z-a|\geq|\operatorname{Im} z|$.

- S $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}\, z|$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$. Sachant que P est scindé sur $\mathbb{C}$, il s'agit de montrer que les racines de P sont toutes réelles. Utiliser pour cela l'hypothèse vérifiée par P.

31 **1.** Dériver l'égalité $(X-1)P = X^n - 1$ puis évaluer en ω_k.

2. Evaluer l'égalité $\prod_{k=1}^{n}(X-\omega_k) = P(X)$ en 1 et en 0 pour calculer les produits qui apparaissent dans le calcul.

32 **a)** Pour $z \in \mathbb{C}$ résoudre l'équation $P(z) = 0$ c'est à dire $(z+1)^n = e^{2ina}$.

Réponse. Les racines sont les $z_k = e^{2ia+\frac{2ik\pi}{n}} - 1$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

b) P est de degré n et on a trouvé n racines distinctes, il est scindé sur $\mathbb{C}$ et

$$(X+1)^n - e^{2ina} = \prod_{k=0}^{n-1}(X - z_k)$$

Evaluer cette égalité en 0 puis utiliser la transformation de $1 - e^{i\theta}$ pour simplifier $-z_k$ dans le produit.

Réponse : $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$.

33 Procéder par l'absurde et factoriser $P - a$.

34 Procéder par récurrence sur n.

35 **1. a)** Les relation entre coefficients et racines donnent $a+b+c = 0$ et $ab+ac+bc = -2$.
Il suffit alors de développer $0 = (a+b+c)^2$.
Réponse. $S_1 = 4$.

b) Effectuer la division euclidienne de X^4 par P. On trouve $X^4 = XP + 2X^2 - 5X$.
Evaluer successivement cette égalité en a, b et c et sommer les trois égalités.
Réponse. $S_2 = 8$.

2. Le polynôme $Q = (X-a^2)(X-b^2)(X-c^2)$ convient.
Reste à calculer explicitement ses coefficients.
En développant on obtient
$Q = X^3 - (a^2+b^2+c^2)X^2 + (a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)X - (abc)^2$
Le coefficient de X^2 a déjà été calculé.
La valeur de abc est donnée par les relations entre coefficients et racines sur le polynôme P.
Pour calculer $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$, utiliser S_2 et S_1^2.
Réponse : $Q = X^3 - 4X^2 + 4X - 25$.

36 **a)** Si (x,y,z) est solution alors x,y,z sont les racines de

$$P = X^3 - (x+y+z)X^2 + (xy+xz+yz)X - xyz$$

Avec le système on obtient $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ xyz = -4 \\ xy+yz+xz = -4 \end{cases}$

Ainsi (x,y,z) sont les racines de $P = X^3 - X^2 - 4X + 4$.
Réponse. $\{x,y,z\} = \{1, 2, -2\}$.

b) Si (x,y,z) est solution alors x,y,z sont les racines de
$$P = X^3 - (x+y+z)X^2 + (xy+xz+yz)X - xyz$$
il suffit de même de déterminer les valeurs de $x+y+z$, $xy+yz+xz$ et xyz.

- $x+y+z = 1$ par la première équation : $x+y+z = 1$.
- La valeur de $xy+yz+xz$ s'obtient en développant $(x+y+z)^2$ et en utilisant les deux premières équations.
  On trouve : $xy+yz+xz = 0$.
- Pour trouver xyz on peut évaluer $P = X^3 - X^2 - xyz$ en les racines x, y et z de P puis sommer les égalités obtenues.
  On trouve : $xyz = -2$.

Ainsi (x,y,z) sont les racines de $P = X^3 - X^2 + 2$.
Réponse. $\{x,y,z\} = \{-1, 1+i, 1-i\}$.

37 $x+y+z = xy+xz+yz = 0$ donc, d'après les relations entre coefficients et racines, x, y et z sont les racines de $P = X^3 - a$ avec $a = xyz$.
Les complexes x, y et z sont donc les racines cubiques de a.
Vu que $x^3 = a$, les trois racines cubiques de a sont x, jx et j^2x.
Ainsi $(y,z) = (jx, j^2x)$ ou $(y,z) = (j^2x, jx)$.

38 **a)** On sait déjà que P a au plus 3 racines réelles.
Il suffit donc de montrer que P a au moins 3 racines réelles : utiliser le TVI en évaluant en $-4, -3, 1, 2$ et 3.

b) Poser $\alpha = \mathrm{Arctan}\, a$, $\beta = \mathrm{Arctan}\, b$ et $\gamma = \mathrm{Arctan}\, c$.
Il suffit de montrer que

(a) $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = 1$
(b) $\alpha+\beta+\gamma \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(a) A l'aide de la formule pour $\tan(a+b)$ (avec $b = \beta+\gamma$) on obtient $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{a+b+c-abc}{1-(ab+ac+bc)}$
Il suffit d'utiliser les relations entre coefficients et racines.

(b) Encadrer α, β et γ à l'aide des encadrements de a, b et c trouvés en a) et de la croissance de Arctan.

39 Echelonner le système. On constate que le système possède une unique solution et on obtient $z = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$.
L'expression demandée pour z s'obtient en utilisant les relations entre coefficients et racines qui permettent de calculer les quantités $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ et $\alpha\beta\gamma$.
Les expressions demandées pour x et y s'obtiennent en utilisant la symétrie des rôles joués par x, y et z.

40 En posant $Z_1 = z_1+z_2$, $Z_2 = z_2+z_3$ et $Z_3 = z_3+z_1$ et :

$$\begin{cases} S_1 = Z_1+Z_2+Z_3 \\ S_2 = Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_1Z_3 \\ S_3 = Z_1Z_2Z_3 \end{cases}$$

on sait que le polynôme $Q = X^3 - S_1X^2 + S_2X - S_3$ convient.
il s'agit d'expliciter Q en fonction de a, b, c.
Pour cela exprimer S_1, S_2, S_3 en fonction de

$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3 = -a \\ z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3 = b \\ z_1z_2z_3 = c \end{cases}$$

On obtient : $S_1 = -2a$ $\quad S_2 = a^2+b$ $\quad S_3 = -ab+c$
N.B. : Pour le calcul de S_3 on peut développer le produit mais on peut aussi utiliser astucieusement le fait que $P = (X-z_1)(X-z_2)(X-z_3)$ pour obtenir $S_3 = P(-a)$.