1 **1.** Suivre la méthode 1 du SF 1

2. On peut par exemple prendre $H = \mathbb{R}_+^*$ et un sous-groupe K très simple à deux éléments.

2 Suivre la méthode 1 du SF 1 .

3 **1.** Pour $k \in \mathbb{N}$, procéder par récurrence.

Pour $k \in \mathbb{Z}_-$, écrire $k = -\ell$ où $\ell \in \mathbb{N}$ et utiliser la stabilité de H par passage à l'opposé/

2. Fixer $k \in H$ et écrire la division euclidienne de k par p : $k = pq + r$. Montrer que $r = 0$ en prouvant que $r \in H$ et en utilisant la minimalité de p

3. Faire le bilan des deux questions précédentes.

4 L'entier d demandé est : $d = a \wedge b$.
Procéder par double inclusion.

5 Raisonner par l'absurde en considérant les puissances z^n.

6 **1. a)** On peut par exemple résoudre l'équation $\varphi(x) = y$ d'inconnue $x \in G$ pour $y \in G$ fixé.

b) En notant P le produit de tous les éléments de G *i.e.* $P = \prod_{x \in G} x$, montrer que :

- D'une part : $\prod_{x \in G} (g \star x) = g^n \star P$
- D'autre part : $\prod_{x \in G} (g \star x) = P$

2. Par analyse-synthèse, montrer qu'il s'agit des $\mathbb{U}_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Utiliser la question **1.** dans l'analyse.

7 **1. a)** Il suffit de vérifier soigneusement chacune des trois conditions. Fixer $x, y, z \in G$ et vérifier que :

- $x \sim x$ (réflexivité, qui repose sur le fait que $e \in H$)
- Si $x \sim y$ alors $y \sim x$ (symétrie, qui repose sur le fait que H est stable par passage à l'inverse)
- Si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x \sim z$ (transitivité, qui repose sur le fait que H est stable par $\star$)

b) Les classes d'équivalences pour la relation $\sim$ forment une partition de G. Notant $C_1, \dots, C_k$ ces classes d'équivalences, l'égalité $G = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ permet d'écrire $n = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Card} C_i$. Il suffit de remarquer que les classes d'équivalences sont toutes de même cardinal p : en effet chaque classe C_i s'écrit sous la forme
$$C_i = \{x_i \star h ; h \in H\} = x_i \star H$$
pour un certain élément $x_i \in G$.

Ainsi $n = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Card} C_i = kp$

8 **1.** Considérer l'ensembles des valeurs prises par f.

2. Il reste à prouver la stabilité par passage à l'inverse. Pour cela, étant donné $x \in H$, la non injectivité établie à la question **1.** assure l'existence de deux indices $k < \ell$ tels que $x^k = x^\ell$. Exploiter cette égalité pour écrire x^{-1} comme une puissance de x.

9 Dans chaque cas commencer par bien identifier quelles sont les lois pour l'ensemble de départ et d'arrivée, et qui est l'élément neutre pour l'ensemble d'arrivée.

a) *Réponse.* $\mathrm{Ker}\, f = \{(1, 2k\pi) ; k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{C}^*$.

b) *Réponse.* $\mathrm{Ker}\, f = \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{U}$.

c) *Réponse.* $\mathrm{Ker}\, f = n\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{U}_n$.

10 **1.** Il s'agit de vérifier que :

- $\star$ est associative.
- $\star$ possède un élément neutre : vérifier que $e' = f(e)$ convient où e est l'élément neutre de G pour $\cdot$
- Tout $x \in E$ possède un inverse pour $\star$: vérifier que $x' = f(X')$ convient où X' est l'inverse de $X = f^{-1}(x)$ dans G pour $\cdot$

2. f est déjà bijective donc il suffit de vérifier que pour tous $X, Y \in G$: $f(X \cdot Y) = f(X) \star f(Y)$.
Utiliser la définition de $\star$ avec $x = f(X)$ et $y = f(Y)$.

3. a) Calcul direct en écrivant les th en fonction des exponentielles.

b) Appliquer la question **1.** avec $f = \mathrm{th}$ et définie sur $\mathbb{R}$ muni de la loi $+$.

11 **1. a)** Suivre la méthode 1 du SF 1

b) Procéder par analyse-synthèse. Dans l'analyse, si f est un morphismes de $\langle g \rangle$ dans $\langle g \rangle$: $f(g) = g^p$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$. Prouver alors que pour tout $x \in \langle g \rangle$: $f(x) = x^p$ (exprimer x en fonction de g)

2. a) Pour la loi $+$: $\langle g \rangle = \{kg\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Noter que $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ donc tout morphisme de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ est de la forme $x \mapsto px$ d'après **1.**.
Montrer que seules $\pm \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ sont bijectives.

b) Par analyse-synthèse, montrer qu'il s'agit des applications $\varphi_a : x \mapsto ax$ où $a \in \mathbb{Q}^*$ est un rationnel non nul quelconque.

c) Par analyse-synthèse.
Dans l'analyse, noter que $\mathbb{U}_n = \langle \omega \rangle$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ donc tout morphisme f de $\mathbb{U}_n$ dans $\mathbb{U}_n$ est de la forme $z \mapsto z^p$ d'après **1.**. Montrer que la bijectivité de f impose $p \wedge n = 1$ en considérant un antécédent de ω par f.
Pour la synthèse, si $p \wedge n = 1$ et si $up + nv = 1$ pour certains $u, v \in \mathbb{Z}$, vérifier que $g : z \mapsto z^u$ est une réciproque de $f : z \mapsto z^p$.

12 **1.** Il s'agit de vérifier que :

- τ_g est bijective.
- $\tau_g(x \star y) = \tau_g(x) \star \tau_g(y)$ pour tous $x, y \in G$.

2. Ici $g \in \mathrm{Ker}\, \varphi$ signifie $\tau_g = \mathrm{Id}_G$. Il s'agit de traduire cette dernière condition de façon un peu plus explicite (cf. exercice ??)

3. Utiliser la méthode 2 du SF 1

13 Considérer l'application $g \mapsto \gamma_g$ où γ_g est la multiplication à gauche par g (*i.e.* l'application $x \mapsto g \star x$)

14 **1. a)** Suivre la méthode 1 ou la méthode 2 du SF 1

b) On peut procéder par analyse-synthèse.

- Pour l'analyse, si $x = y \star z$ avec $y \in G_a$ et $z \in G_b$.

- Remarquer d'abord que : $y^b = z^a = e$
ce qui assure que : $x^a = y^a$ et $x^b = z^b$
- Ecrire $1 = au + bv$ ce qui assure que $x^{au} = y$ et $x^{bv} = z$.
- Dans la synthèse poser $y = x^{au}$ et $z = x^{bv}$ et ne pas oublier qu'il y a trois conditions à vérifier :
$$y \star z = x, \quad y \in G_a \quad \text{et} \quad z \in G_b$$

2. $un + kv = 1$ pour certains $u, v \in \mathbb{Z}$, vérifier que $\Psi : x \mapsto x^v$ est une réciproque de Φ.

15

16 **1.** Pour la nilpotence de $a+b$, calculer $(a+b)^{n+m}$ à l'aide de la formule du binôme où $a^n = b^m = 0_A$.

2. Utiliser la factorisation de $1_A^n - a^n$ où n est tel que $a^n = 0$.

17 **1.** Par exemple :

- pour montrer que $2a = 0_A$, on peut exploiter $(a+a)^2 = a + a$.
- pour montrer que $ab = -ba$, on peut exploiter $(a+b)^2 = a + b$.

2. Combiner $2ab = 0_A$ et $ab = -ba$.

18 **1.** Utiliser la méthode 1 du SF 5

2.

3. Par analyse-synthèse les seuls inversibles sont ± 1.
Dans l'analyse, montrer que si $z \in U\big(\mathbb{Z}[i]\big)$ alors $|z| = 1$ avec la question **2.**.

19 Vérifier que :

- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un anneau en montrant qu'il s'agit d'un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
- Tout élément non nul de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ possède un inverse dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$: il suffit de vérifier que si $(a,b) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0,0)\}$ alors $\dfrac{1}{a + b\sqrt{2}}$ peut s'écrire sous la forme $a' + \sqrt{2}b'$.

20 Montrer que $\operatorname{Ker} f = \{0_A\}$.
Pour cela on peut par exemple supposer par l'absurde qu'il existe $x \neq 0_A$ tel que $f(x) = 0_B$ et multiplier par $f(x^{-1})$.

21

22 Montrer que :

- $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en procédant par récurrence.
- $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_-$ en considérant $f(-n)$.
- $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q}$ pour tous $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ en calculant $qf\left(\dfrac{p}{q}\right)$.
- f est croissante en montrant d'abord que $f(a) \geq 0$ si $a \geq 0$ (écrire $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$) puis en écrivant $y = y - x + x$ pour $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$.
- $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en considérant les suites (y_n) et (z_n) d'approximations décimales de x.

23

24 **1.** Pour tout $p \in \mathbb{P}$, la valuation p-adique prolongée en 0 par $v_p(0) = +\infty$ satisfont les conditions requises. Celle-ci se prolonge à $\mathbb{Q}$ en posant $v_p(r) = v_p(a) - v_p(b)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$ et tous $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \dfrac{a}{b}$ (vérifier que cette quantité ne dépend pas du couple (a,b) choisi).

2. Les seules valuations sur $\mathbb{Q}$ sont la valuation triviale (*i.e.* nulle sur $\mathbb{Q}^*$) et les applications λv_p où p décrit $\mathbb{P}$ et λ décrit $\mathbb{R}_+^*$.