Groupes

1 SF 1 Soit $(G,\star)$ un groupe.

1. Soit H, K deux sous-groupes d'un groupe G. Montrer que $H\cap K$ est un sous-groupe de G.
2. Trouver deux sous-groupes de $(\mathbb{R}^*,\times)$ dont la réunion n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$.

2 SF 1 Soit $(G,\star)$ un groupe. On définit le centre de G par

$$Z(G)=\{a\in G \mid \forall x\in G,\quad a\star x=x\star a\}$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

3 Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$, non réduit à $\{0\}$. On note p le plus petit entier strictement positif appartenant à H.

1. Montrer que $p\mathbb{Z}\subset H$ où : $p\mathbb{Z}=\{kp\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$.
2. Montrer que $H\subset p\mathbb{Z}$.
3. Que peut-on en déduire sur les sous-groupes de $\mathbb{Z}$?

4 Soient $a,b\in\mathbb{Z}$, on pose : $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=\{ka+\ell b\ ;\ k,\ell\in\mathbb{Z}\}$. Déterminer un entier d pour lequel : $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=d\mathbb{Z}$.

5 Soit H un sous-groupe borné de $(\mathbb{C}^*,\times)$ *i.e.* pour lequel il existe $M\in\mathbb{R}_+^*$ tel que : $|z|\le M$ pour tout $z\in H$. Montrer que $H\subset\mathbb{U}$. *Indication : Raisonner par l'absurde.*

6

1. Soit G un groupe commutatif fini de cardinal n et $g\in G$.
   a) Montrer que $\varphi: x\mapsto g\star x$ est une permutation de G.
   b) Montrer que $g^n=e$ en calculant de deux manières le produit : $\displaystyle\prod_{x\in G}(g\star x)$.
2. Déterminer tous les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$.

7 Soit $(G,\star)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G. On note p le cardinal de H et n le cardinal de G

1. On définit sur G la relation $\sim$ par
$$x\sim y \iff \exists h\in H,\quad y=x\star h$$
   Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G.
2. En déduire que p divise n.

8 SF 1 Soient $(G,\star)$ un groupe et H une partie finie et non vide de G stable par $\star$.

1. Soit $a\in H$. Pourquoi $f: k\mapsto a^k$ n'est pas injective sur $\mathbb{N}$?
2. En déduire que H est un sous-groupe de G.

Morphismes de groupes

9 SF 2 Dans chacun des cas, montrer que f est un morphisme de groupe et déterminer son noyau et son image.

a) $f:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^*\\ (r,\theta) & \longmapsto & re^{i\theta}\end{array}$ b) $f:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^*\\ z & \longmapsto & \dfrac{z}{|z|}\end{array}$ c) $f:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^*\\ k & \longmapsto & \omega^k\end{array}$ où $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$ $(n\ge1)$

10 SF 1 SF 2

1. Soient $(G,\cdot)$ un groupe et f une bijection de G sur un ensemble E. Pour tous $x,y\in E$, on pose :
$$x\star y=f\left(f^{-1}(x)\cdot f^{-1}(y)\right)$$
   Montrer que $(E,\star)$ est un groupe.
2. Montrer que f est un isomorphisme de $(G,\cdot)$ sur $(E,\star)$.
3. a) Etablir : $\forall x,y\in\mathbb{R},\quad \operatorname{th}(x+y)=\dfrac{\operatorname{th}x+\operatorname{th}y}{1+\operatorname{th}x\operatorname{th}y}$.
   b) Pour tous $x,y\in\left]-1,1\right[$, on pose : $x\perp y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.
   Montrer que $\left(\left]-1,1\right[,\perp\right)$ est un groupe.

11 SF 1 SF 2

1. Soit $(G,\star)$ un groupe et $g\in G$. On pose $\langle g\rangle=\left\{g^k\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
   a) Vérifier que $\langle g\rangle$ est un sous-groupe de G.
   b) Montrer que les morphismes de $\langle g\rangle$ dans $\langle g\rangle$ sont les applications $x\mapsto x^p$ avec $p\in\mathbb{Z}$.
2. Déterminer tous les morphismes de groupe bijectifs de :
   a) $(\mathbb{Z},+)$ sur $(\mathbb{Z},+)$ b) $(\mathbb{Q},+)$ sur $(\mathbb{Q},+)$
   c) $(\mathbb{U}_n,\times)$ sur $(\mathbb{U}_n,\times)$ (où $n\in\mathbb{N}^*$).

12 SF 1 SF 2 Soit $(G,\star)$ un groupe. Pour tout $g\in G$ on note τ_g l'application $x\mapsto g\star x\star g^{-1}$ de G dans G.

1. Montrer que pour tout $g\in G$, τ_g est un isomorphisme de G sur lui-même.
2. Montrer que $\varphi: g\mapsto\tau_g$ est un morphisme de $(G,\star)$ dans $\left(S_G,\circ\right)$ et déterminer son noyau.
3. On pose $I_G=\left\{\tau_g\ ;\ g\in G\right\}$. Montrer que $\left(I_G,\circ\right)$ est un groupe.

13 SF 2 SF 3 Soit G un groupe. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de S_G.

14 SF 1 Soit $(G,\star)$ un groupe commutatif. On suppose qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $g\in G$: $g^n=e$.

1. On suppose que $n=ab$ où a et b sont premiers entre eux. On pose : $G_a=\{g^a\ ;\ g\in G\}$ et $G_b=\left\{g^b\ ;\ g\in G\right\}$.
   a) Montrer que G_a et G_b sont des sous-groupes de G.
   b) Montrer que pour tout $x\in G$, il existe un unique couple $(y,z)\in G_a\times G_b$ tel que : $x=yz$.
2. Soit $k\in\mathbb{N}$, premier avec n. Montrer que $\varphi: x\mapsto x^k$ est un isomorphisme de G sur lui-même.

15 Soit $(G,\star)$ un groupe fini et φ un automorphisme de G dont le seul point fixe est e.

1. Soit n le plus petit entier non nul tel que $\varphi^n=\mathrm{Id}_G$. Montrer que $x\star\varphi(x)\star\cdots\star\varphi^{n-1}(x)=e$ pour tout $x\in G$.
2. Si $n=2$, montrer que G est commutatif.
3. Si $n=3$ montrer que $x\star\varphi(x)=\varphi(x)\star x$ pour tout $x\in G$

Anneaux

16 Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Un élément $a \in A$ est dit *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $a^n = 0_A$.

1. Soient $a, b \in A$ tels que : $ab = ba$. Montrer que si a et b sont nilpotents, alors ab et $a+b$ sont nilpotents.
2. Soit $a \in A$, nilpotent. Montrer que $1_A - a$ est inversible et exprimer $(1_A - a)^{-1}$.

17 Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que pour tout $a \in A$: $a^2 = a$.

1. Montrer que pour tous $a, b \in A$: $2a = 0_A$ et $ab = -ba$
2. En déduire que A est commutatif.

18 SF 5 On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib\ ;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$: $|z|^2 \in \mathbb{N}$.
3. En déduire $U\big(\mathbb{Z}[i]\big)$.

19 SF 7 Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2}\ ;\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ est un corps.

Morphismes d'anneaux

20 SF 3 Soit K, L des corps et $f : K \to L$ un morphisme d'anneau. Montrer que f est injectif.

21

1. Soit φ un morphisme d'anneau de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   a) Montrer que pour toute fonction positive $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $\varphi(f)$ est aussi positive.
   b) En déduire que $\varphi\big(|f|\big) = |\varphi(f)|$ pour toute $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. En déduire que les anneaux $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne sont pas isomorphes.

22 Soit f un morphisme d'anneau de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

23 Soit K un corps, on pose $K^* = K \setminus \{0_K\}$. On note f l'application $x \mapsto x^2$ de K^* dans K^*.

1. Montrer que f est un morphisme de groupe.
2. On pose $C = \mathrm{Im}\, f$. On appelle racine carrée tout morphisme de groupe $r : C \to K^*$ tel que $f \circ r = \mathrm{Id}_C$.
   a) Montrer que si $K = \mathbb{R}$, il y a une seule racine carrée.
   b) Montrer que si $K = \mathbb{C}$, il n'existe pas de racine carrée.
   c) Montrer que si $K = \mathbb{Q}$, il existe une infinité de racines carrées.

24 On appelle valuation sur un anneau A toute application v de A dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que pour tous $x, y \in A$:

- $v(xy) = v(x) + v(y)$
- $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$
- $v(x) = +\infty \iff x = 0$

(en convenant que $x + \infty = +\infty$ et $+\infty \geq x$ pour tout $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

1. Donner des exemples de valuations sur $\mathbb{Z}$, sur $\mathbb{Q}$.
2. Déterminer toutes les valuations sur $\mathbb{Q}$.