1 **a)** Faire apparaître $f(a)$ au numérateur et utiliser $\dfrac{f(X)-f(a)}{X-a} \xrightarrow[X\to a]{} f'(a)$.
Réponse : $2f'(a)$

b) Factoriser astucieusement le numérateur :
$f(x)g(a)-f(a)g(x) = \big(f(x)-f(a)\big)g(a) - f(a)\big(g(x)-g(a)\big)$
pour faire apparaître les taux d'accroissements de f et g au point a.
Réponse : $f'(a)g(a)-f(a)g'(a)$

2 Par hypothèse : $\tau(x) = \dfrac{f(2x)-f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
Exprimer $f(x)-f(0)$ à l'aide des $\tau\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$ par télescopage en écrivant d'abord :

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\tau\left(\frac{x}{2^k}\right)\times\frac{x}{2^k}$$

Ainsi pour tout $x\neq 0$:

$$(\star)\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{f(x)-f(0)}{x} = \sum_{k=1}^{n}\tau\left(\frac{x}{2^k}\right)\times\frac{1}{2^k} + \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)-f(0)}{x}$$

Revenir à la définition pour montrer : $\frac{f(x)-f(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
En fixant $\varepsilon>0$, l'hypothèse $\tau(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$ fournit un α tel que $|\tau(x)|\leq\varepsilon$ pour tout $x\in[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\}$.
Prendre alors la valeur absolue dans $(\star)$, utiliser l'inégalité triangulaire, calculer la somme géométrique qui apparaît puis faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\leq\varepsilon$

3 **a)** Par composition mais attention à la rédaction.

b) Etudier la limite de $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. On trouve : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.

c) La limite du taux d'accroissement est compliquée, il est plus simple d'appliquer le théorème de la limite de la dérivée.
On trouve ici : $f'(x)\xrightarrow[x\to 1^-]{}+\infty$

4 **a)**
- f est définie sur $[0,2]$.
- *Dérivabilité sur* $]0,2[$ Par composition mais attention à la rédaction.
- *En* 0. On trouve : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
- *En* 2. On trouve $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to 2]{} -\infty$.

b)
- f est définie sur $[-1,1]$.
- *Dérivabilité sur* $]-1,1[$ Par composition mais attention à la rédaction.
- *En* 1. On trouve : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
- *En* -1. f est paire : utiliser l'étude en 1

c)
- f est définie sur $\mathbb{R}$.
- *Dérivabilité sur* $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$. Par composition mais attention à la rédaction.
- *En* 0. On trouve : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
- *En* 2. On trouve $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\xrightarrow[x\to 2^-]{} -8$ et $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\xrightarrow[x\to 2^+]{}$ 8

d)
- f est définie sur $\mathbb{R}$.
- *Dérivabilité sur* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Par composition et produit.
- *En* 0. On trouve : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

5 **a)**

b)

c)

d) $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$ (tableau de signes).
Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable (appliquer le th. de dérivabilité d'une composée).
En 0 on étudie la limite du taux d'accroissement : on trouve que f est dérivable à gauche et à droite mais que $f'_g(0)=-1\neq f'_d(0)=1$, donc f n'est pas dérivable.
Si $x\neq 0$: $f'(x)=\operatorname{Arctan} x+\frac{x}{1+x^2}$.

e) $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$.
Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable (th.dérivabilité d'une composée).
En 0 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ n'a pas de limite : f n'est pas dérivable.
Si $x\neq 0$: $f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$.

f) $\mathscr{D}_f=[-1,1]$.
Sur $]-1,1[$, f est dérivable th. de dérivabilité d'une composée).
En ± 1 on étudie la limite du taux d'accroissement : on trouve que $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\xrightarrow[x\to 1]{}-\infty$ et $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\xrightarrow[x\to -1]{}+\infty$ donc f n'est dérivable ni en 1 ni en -1.
Pour $x\in]-1,1[$: $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

g) $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}_+^*$.
Sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$, f est dérivable (th. de dérivabilité d'une composée).
En 1 on étudie la limite du taux d'accroissement : on trouve que f est dérivable à gauche et à droite mais que $f'_g(1)=-1\neq f'_d(1)=1$, donc f n'est pas dérivable.
Pour $x\in]0,1[$, $f'(x)=-\frac{1}{x}$ et pour $x>1$, $f'(x)=\frac{1}{x}$.

h) $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable (quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas). En 0 on étudie la limite du taux d'accroissement : on trouve que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc f est dérivable en 0.
Pour $x<0$, $f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ et pour $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$.

i) $\mathscr{D}_f=[0,1]\cup[2,+\infty[$ (tableau de signes). Sur $]0,1[$ ou $]2,+\infty[$, f est dérivable (th. de dérivabilité d'une composée). En 0 on trouve $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, en 1 on trouve $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\xrightarrow[x\to 1^-]{}-\infty$, en 2 on trouve $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\xrightarrow[x\to 2^+]{}+\infty$.
Pour $x\notin\{0,1,2\}$ on trouve $f'(x)=\frac{5x^4-12x^3+6x^2}{2\sqrt{x^5-3x^4+2x^3}}$.

j) $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}_+$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable (composée ...).
En 0 on trouve que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to 0^+]{}+\infty$: f n'est pas dérivable.
Si $x>0$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

6 **1.** Etudier la limite de f en 0^+ en revenant à l'exponentielle puis en utilisant les croissances comparées.

2.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition (mais attention à la rédaction)
- on montre que f n'est pas dérivable en 0 :
  - ou bien en montrant que $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to 0]{}-\infty$
  - ou bien à l'aide du théorème de la limite de la dérivée.

7 En partant de $m(x) \le f(x) \le M(x)$, encadrer $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ par $\dfrac{m(x)-m(a)}{x-a}$ et $\dfrac{M(x)-M(a)}{x-a}$ (distinguer $x \to a^+$ et $x \to a^-$).

8 Pour tout $a \in I$ utiliser l'hypothèse pour montrer :
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$$

9 **1.** Appliquer le TVI strictement monotone.

2. Appliquer le théorème de dérivation des fonctions réciproque à $g = f^{-1}$.

10 Considérer la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ et montrer que

1. g possède un minimum k sur $]0,1]$.
2. Ce minimum k est strictement positif

1. Utiliser le théorème des bornes atteintes. Pour cela il convient de commencer par prolonger g par continuité sur $[0,1]$ afin d'obtenir une fonction continue sur un segment. Il s'agit donc d'étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en 0.
2. Il suffit de montrer que $g(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Distinguer $x = 0$ et $x \in]0,1]$.

11 Le graphe de f est situé au-dessus de sa tangente en a.

12 Utiliser :

- Le théorème de la limite monotone appliqué à f' pour montrer que f' a des demi-limites finies en tout point (intérieur) à I
- Le théorème de la limite de la dérivée pour montrer que f' est continue à gauche et à droite en tout point (intérieur) à I

13 Commencer par traiter le cas où f est continue.

14

15 Utiliser la formule de Leibniz dans chaque cas.

a) *Réponse.* $f^{(n)}(x) = e^x\left(x^2 + (2n+1)x + n^2 + 1\right)$.

b) *Réponse. Pour* $n \ge 1$: $\quad f^{(n)}(x) = \dfrac{2 \times (-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

c) *Réponse.* $f^{(n)}(x) = n!\left(x^2 + 2nx(1+x) + \dfrac{n(n-1)}{2}(1+x)^2\right)$.

16 Utiliser les nombres complexes : $f(x) = \mathrm{Re}\left(e^{(\sqrt{3}+i)x}\right)$.
Il suffit de dériver $x \mapsto e^{\lambda x}$ avec $\lambda = \sqrt{3} + i$ puis de mettre $(\sqrt{3}+i)^n$ sous forme trigonométrique.
Réponse : $f^{(n)}(x) = 2^n e^{\sqrt{3}x} \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{6}\right)$.

17 Utiliser la formule de Leibniz en écrivant $f_n = u \times v$ où $u(x) = x^{n-1}$ et $v(x) = \ln x$.

On obtient : $\quad f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tbinom{n}{k}(-1)^{k-1}$.

Remarquer alors que la somme se calcule en utilisant : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(-1)^k = 0$ (formule du binôme).

18 Le résultat se vérifie pour $n = 1$ et $n = 2$ par le calcul de $f'(x)$ et $f''(x)$.
Pour $n \ge 2$ procéder par récurrence forte en dérivant n fois l'égalité :
$$\forall x > 0, \quad f'(x)f(x) = x$$
On obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} f^{(n-k)} = 0$

Sortir alors le terme d'indice $k = n$ pour exprimer $f^{(n+1)}$ en fonction des autres dérivées puis calculer $(-1)^n f^{(n+1)}$ en écrivant $(-1)^n = (-1)^{k-1}(-1)^{n-k-1}$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence forte sur les $(-1)^k f^{(k+1)}$ et les $(-1)^{n-k-1} f^{(n-k)}$.

19 Dériver n fois la fonction $\varphi : x \mapsto e^x f(x)$ avec Leibniz.
Réponse : il s'agit des fonctions $x \mapsto P(x)e^{-x}$ où P est une fonction polynomiale de degré strictement inférieur à n

20 **1.** Procéder par récurrence sur n.

2. On trouve : $(1+x^2)f'(x) + 2xf(x) = 0$.
Il suffit alors de dériver n fois cette relation en utilisant la formule de Leibniz pour dériver chacun des deux termes
$$(1+x^2)f'(x) = u(x) \times f'(x) \quad \text{et} \quad 2xf(x) = v(x)f(x)$$

21

22 Suivre la méthode du savoir-faire SF 5

23 Suivre la méthode du savoir-faire SF 5

24 **1.** Calculer la limite de f en 0.

2. Procéder par récurrence.

3. Procéder par récurrence. Pour l'hérédité, prouver que $f^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en utilisant le théorème de la limite de la dérivée :

- Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (composition)
- Calculer la limite des $f^{(n+1)}$ en 0 à l'aide de l'expression trouvée à la question 2.
- Le théorème de la limite de la dérivée assure que $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et que sa dérivée $f^{(n+1)}$ y est continue

25 Appliquer le théorème de Rolle à $g : x \mapsto f(x)e^{-x}$.

26 Appliquer le théorème de Rolle à $\varphi : x \mapsto f(x)^\alpha f(1-x)^\beta$.
Attention de justifier soigneusement la continuité sur $[0,1]$ (composition).

27 **1.** Prolonger g par continuité en 0 puis appliquer le théorème de Rolle à la fonction g.

2. Considérer un $c \in]0,1[$ pour lequel : $\quad g'(c) = 0$.

28 Par l'absurde, supposer que l'équation a au moins cinq solutions. La fonction $f : x \mapsto x^6 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ s'annule au moins cinq fois.
Aboutir à une contradiction en appliquant le théorème de Rolle et en calculant $f^{(3)}$.

29 Procéder par récurrence sur n

30 Itérer le théorème de Rolle :

- $f(a) = f(b)$ donc il existe $c_1 \in]a,b[$ tel que $f'(c_1) = 0$;
- $f'(a) = f'(c_1)(= 0)$ donc il existe $c_2 \in]a,b[$ tel que $f''(c_2) = 0$
- ...

plus proprement, montrer par récurrence sur $k \in [\![1,n]\!]$ qu'il existe $c_k \in]a,b[$ tel que $f^{(k)}(c_k) = 0$.

31 Prolonger $\varphi : x \mapsto f(\tan x)$ par continuité sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puis appliquer le théorème de Rolle à φ sur ce segment.

32 **1. a)** Il suffit de résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ d'inconnue A.
Ici x est fixé : le réel A trouvé dépend de x.
b) φ s'annule trois fois : $\varphi(a) = \varphi(x) = \varphi(b) = 0$.
Avec le théorème de Rolle, montrer que φ'' s'annule une fois. Simplifier l'expression de φ'' et observer que l'égalité $\varphi''(c) = 0$ conduit à $f''(c) = A$. L'égalité demandée en découle en écrivant que $\varphi(x) = 0$.
2. Traiter les cas $x = a$ et $x = b$ à part.
Pour $x \in]a,b[$, utiliser la question **2.** et montrer que $(x-a)(b-x) \leq \dfrac{(b-a)^2}{4}$ pour tout $x \in [a,b]$.

33 **1.** Il suffit de résoudre l'équation $\varphi(a) = 0$ d'inconnue A.
2. La dérivée des produits sous le signe $\sum$ fait apparaître des simplifications :
Réponse : $\varphi'(t) = \left(A - f^{(n+1)}(t)\right)\dfrac{(b-t)^n}{n!}$
3. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ sur $[a,b]$.
L'égalité $\varphi'(c) = 0$ conduit à $f^{(n+1)}(c) = A$.
L'égalité demandée en découle en écrivant que $\varphi(b) = 0$.

34 C'est la même ruse que les exercices précédents :

- Considérer la fonction $\varphi : t \mapsto f(t) - \dfrac{A}{24}t^2(1-t)^2$ en fixant la valeur de A pour que $\varphi(x) = 0$.
- Appliquer le théorème de Rolle plusieurs fois d'affilée à φ pour obtenir l'existence d'un $c \in]0,1[$ tel que $\varphi^{(4)}(c) = 0$.
- Calculer $\varphi^{(4)}$ et utiliser l'égalité $\varphi^{(4)}(c) = 0$ pour montrer que $f^{(4)}(c) = A$.
- Conclure à partir de la relation $\varphi(x) = 0$.

35 C'est la même ruse que les exercices précédents :

- Considérer la fonction $\varphi : t \mapsto f(t) - (t-a_1)\dots(t-a_n)\dfrac{A}{n!}$ en fixant la valeur de A pour que $\varphi(x) = 0$.
- La fonction φ s'annule en au moins $n+1$ points ce qui assure (voir l'exemple du cours) l'existence d'un c tel que $\varphi^{(n)}(c) = 0$.
- Calculer $\varphi^{(n)}(t)$. Pour cela noter que la fonction $t \mapsto (t-a_1)\dots(t-a_n)$ est de la forme $t \mapsto t^n + Q(t)$ où Q est un polynôme de degré au plus $n-1$ donc $Q^{(n)} = 0$. Utiliser l'égalité $\varphi^{(n)}(c) = 0$ pour montrer que $f^{(n)}(c) = A$.
- Conclure à partir de la relation $\varphi(x) = 0$.

36 C'est la même ruse que les exercices précédents, mais la fonction φ est moins évidente à construire [1]

- Considérer par exemple la fonction
$\varphi : t \mapsto f(a)(b-t) - f(b)(a-t) + (a-b)f(t) - \dfrac{A}{2}(a-b)(b-t)(t-a)$
en fixant la valeur de A pour que $\varphi(c) = 0$.
- Appliquer le théorème de Rolle plusieurs fois d'affilée à φ pour obtenir l'existence d'un $d \in]0,1[$ tel que $\varphi''(d) = 0$.
- Utiliser l'égalité $\varphi''(d) = 0$ pour montrer que $f''(d) = A$.
- Conclure à partir de la relation $\varphi(x) = 0$.

37 Par l'égalité des accroissements finis, pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe un un $c_k \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ tel que : $\dfrac{f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})}{\frac{1}{n}} = f'(c_k)$

38 Appliquer l'inégalité des accroissements finis à $f : t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[1, +\infty[$.
Il suffit de majorer $|f'|$ par $\dfrac{1}{2}$ sur $[1, +\infty[$.

39 Pour $x \in]0, +\infty[$ fixé, appliquer l'égalité des accroissements finis à Arctan entre 0 et x.

40 Pour $x > 0$, appliquer l'égalité des accroissements finis à $g : x \mapsto f(x) - f(-x)$ entre 0 et x.

41 Pour $x > 0$, appliquer l'égalité des accroissements finis à $f : x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$ entre x et $x+1$.

42 **1.** Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, appliquer l'égalité des accroissements fini à ln entre k et $k+1$.
2. a) Sommer $\dfrac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln k$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.
b) Utiliser le th. de la limite monotone.
Pour la décroissance de (u_n) utiliser la minoration de la question 1 : $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

43 Revenir à la définition de la limite.
Fixer $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tel que $|f'(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \geq A$.
Pour majorer $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|$, commencer par appliquer l'égalité des accroissements finis à f entre A et x, puis choisir x suffisamment grand pour que $\left|\dfrac{f(A)}{x}\right| \leq \varepsilon$

44 **1.** Remarquer que $\frac{2}{3}f'(a) + \frac{1}{3}f'(b)$ est entre $f'(a)$ et $f'(b)$ puis appliquer le TVI à f'.
2. Avec le résultat de la question 1, il suffit de montrer qu'il existe $a \in]0,b[$ tel que $\frac{f(b)}{b} = f'(a)$.

45 **1.** Il suffit de montrer que pour tout $a > 0$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ est négative. Pour ce faire montrer que τ_a est croissante et de limite nulle en $+\infty$.
2. a) Commencer par montrer que f' possède une limite $\ell' \leq 0$ en $+\infty$ à l'aide du théorème de la limite monotone. Il suffit ensuite de montrer par ailleurs que $\ell' \geq 0$. Pour cela, constater que $\ell' \geq f'(c)$ pour tout $c > 0$. Montrer alors que $\ell' \geq \tau_x(2x)$ pour tous $x > 0$ à l'aide de l'égalité des accroissements finis et faire tendre x vers $+\infty$.
b) Considérer $f : x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$ par exemple.

46 **1.** Montrer que φ n'est pas strictement monotone.
2. Avec les notations du **1.**, il s'agit de montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = y$.
Appliquer par exemple le théorème de Rolle à la fonction φ.

1. L'idée est de multiplier l'égalité demandée par $(a-b)(a-c)(b-c)$ puis de « faire varier » l'un des trois paramètre (par exemple c)