Dérivabilité, calculs de dérivées

1 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables en $a \in \mathbb{R}$. Que valent :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}$

2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en 0, telle que $\dfrac{f(2x)-f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Montrer que f est dérivable en 0.

3 SF 1 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}\,\mathrm{Arcsin}\,x$ définie sur $[-1,1]$. Etudier la dérivabilité de f :
a) Sur $]-1,0[\cup]0,1[$ **b)** En 0 **c)** En 1 et en -1

4 SF 1 Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de f et étudier sa dérivabilité.

a) $f : x \mapsto x\sqrt{2x-x^2}$. **b)** $f : x \mapsto (x^2-1)\,\mathrm{Arccos}(x^2)$.

c) $f : x \mapsto \left|x^3(x-2)\right|$. **d)** $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

5 SF 1 Dans chacun des cas, déterminer le domaine de définition de f, étudier sa dérivabilité et calculer f'.

a) $f : x \mapsto |\mathrm{Arctan}\,x|$. **b)** $f : x \mapsto x|x|$.
c) $f : x \mapsto \sqrt{x^2-x^3}$. **d)** $f : x \mapsto \sqrt{x\,\mathrm{Arctan}\,x}$.
e) $f : x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **f)** $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.
g) $f : x \mapsto |\ln x|$. **h)** $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x|+1}$.
i) $f : x \mapsto \sqrt{x^5-3x^4+2x^3}$. **j)** $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}(\sqrt{x})$.

6 SF 1 On considère la fonction $f : x \mapsto x^x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
b) Ce prolongement est-il dérivable sur $\mathbb{R}_+$?

7 Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $m : I \to \mathbb{R}$ et $M : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ tels que :
- Au voisinage de a : $m(x) \le f(x) \le M(x)$
- $m(a) = f(a) = M(a)$
- m et M sont dérivables en a et : $m'(a) = M'(a)$.

Montrer que f est dérivable en a et : $f'(a) = m'(a) = M'(a)$

8 Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \left|f(x)-f(y)\right| \le k\left|x-y\right|^{3/2}$$
Montrer que f est constante.

9 SF 4 On considère la fonction $f : x \mapsto x+\ln x$ sur $I =]0,+\infty[$.
1. Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle que l'on déterminera.
2. On note g la bijection réciproque de f. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall y \in \mathbb{R},\ g'(y) = \dfrac{g(y)}{1+g(y)}$.

10 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(0) = 0$ et :
$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) > 0$$
Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) \ge kx$.
Indication : Considérer la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, convexe et dérivable. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) = 0$. Montrer que f possède un minimum en a.

12 Soit $f : I \to \mathbb{R}$, convexe et dérivable sur un intervalle I. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

13 Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y distincts : $\min\big(f(x), f(y)\big) \le \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \max\big(f(x), f(y)\big)$

14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite $\widetilde{f}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ existe et est finie.
Montrer que si $\widetilde{f} \ge 0$ sur $\mathbb{R}$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Indication : Commencer par le cas où $\widetilde{f} \ge \alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Calcul de dérivées successives

15 SF 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n^e de :
a) $x \mapsto (x^2+x+1)e^x$ **b)** $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ **c)** $x \mapsto x^2(1+x)^n$

16 SF 2 Calculer les dérivées successives de $f : x \mapsto e^{x\sqrt{3}}\cos x$.

17 SF 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $f_n(x) = x^{n-1}\ln x$.
Calculer $f_n^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

18 SF 2 On note f la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ sur $]1,+\infty[$. Montrer que pour tous $x > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $(-1)^{n-1}f^{(n)}(x) > 0$

19 SF 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver toutes les fonctions n fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)} = 0$.

20 SF 2 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynôme P_n telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ simplifier l'expression : $(1+x^2)f'(x)+2xf(x)$.
En dérivant n fois l'expression obtenue, montrer que pour tous $n \ge 1$ et $x \in \mathbb{R}$:
$$P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

21 SF 2 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b < c$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(ax)+f(bx)+f(cx) = 0$$

Variante $\mathscr{C}^1$ de la limite de la dérivée

22 SF 5 Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2\ln x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

23 SF 3 SF 3 SF 5 Montrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

24 SF 3 SF 5 On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynôme P_n telle que : $\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$
3. Montrer que le prolongement en 0 de f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$

Théorème de Rolle

25 SF 7 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = e$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $f'(x) = f(x)$

26 SF 7 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0,1]$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que : $\alpha \dfrac{f'(c)}{f(c)} = \beta \dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

27 SF 6 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = 0$.

1. Montrer que la dérivée de $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0,1[$.
   Indication : On pourra prolonger g par continuité en 0.
2. En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine.

28 SF 7 Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation d'inconnue x : $x^6 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ a au plus quatre solutions dans $\mathbb{R}$

29 SF 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la fonction $f_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k}$ s'annule au plus $n-1$ fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

30 SF 6 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable ($n \geq 1$) telle que : $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et $f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f^{(n)}(c) = 0$.

31 SF 6 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = f(0)$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$

Rolle : la ruse de la fonction auxiliaire

32 SF 6 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On note d la fonction affine qui prend les même valeurs que f en a et b.

1. Soit $x \in]a,b[$, fixé.
   a) Trouver un réel A pour lequel la fonction $\varphi : t \mapsto f(t) - d(t) - \dfrac{(t-a)(t-b)}{2} A$ s'annule en x.
   b) A l'aide du théorème de Rolle montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(x) - d(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$
2. Soit M un majorant de $|f''|$ sur $[a,b]$.
   Montrer : $\forall x \in [a,b], \quad |f(x) - d(x)| \leq \dfrac{(b-a)^2}{8} M$.

33 SF 6 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.

1. Trouver un réel A pour lequel la fonction
   $$\varphi : t \mapsto f(b) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (b-t)^k \right) - \frac{A}{(n+1)!} (b-t)^{n+1}$$
   s'annule en a.
2. Calculer $\varphi'(t)$ pour tout $t \in [a,b]$.
3. En déduire qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que :
   $$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

34 SF 6 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ telle que : $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, il existe $c \in]0,1[$ tel que : $f(x) = \dfrac{f^{(4)}(c)}{24} x^2 (1-x)^2$

35 SF 6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ ($n \geq 1$). On suppose que f s'annule en n points distincts $a_1, \ldots, a_n$. Soit $x \in \mathbb{R}$ distinct de $a_1, \ldots, a_n$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = (x-a_1) \ldots (x-a_n) \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

36 SF 6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < c$. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que : $\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \dfrac{1}{2} f''(d)$.

Accroissements finis

37 SF 6 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe n réels $0 < c_0 < \cdots < c_{n-1} < 1$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f'(c_k) = n$. *Indication : considérer les réels $\frac{k}{n}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.*

38 SF 9 Etablir : $\forall x, y \geq 1, \quad \big|\ln(1+x) - \ln(1+y)\big| \leq \frac{1}{2} |x-y|$

39 SF 8 Etablir : $\forall x > 0, \quad \dfrac{x}{1+x^2} < \operatorname{Arctan} x < x$.

40 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $c > 0$ tel que : $f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

41 Etudier la limite en $+\infty$ de $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.

42 SF 8 *La constante d'Euler*

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$.
2. On pose : $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln n$ pour tout $n \geq 1$
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.
   b) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

43 SF 8 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que : $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer : $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

44 Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que pour tout $a \in]0,b[$, il existe $c \in [a,b]$ tel que : $f'(c) = \dfrac{2}{3} f'(a) + \dfrac{1}{3} f'(b)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]0,b]$ tel que $f'(c) = \dfrac{2f(b) + bf'(b)}{3b}$

45 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, convexe, possédant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que f est décroissante.
2. On suppose f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   a) Montrer que $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   b) Montrer que ce résultat n'est plus valable si f n'est pas supposée convexe.

46 Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dérivable.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$ strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Justifier que la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - xy$ n'est pas injective.
2. En déduire que f' prend sur $]a,b[$ toutes les valeurs strictement comprises entre $f'(a)$ et $f'(b)$.