Etude de limites

1 SF 2 Soit $\ell \in \mathbb{R}_+$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que : $f(x+1) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Montrer que $\ell = 0$.

2 SF 1 Etudier la limite de f au point considéré :

a) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3x-4} - \sqrt{x^2-4x+2}$, en $+\infty$

b) $f : x \mapsto x^2 - \sqrt{x^4-3x+2}$, en $+\infty$

c) $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$, en 0 **d)** $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)}$, en $+\infty$

e) $f : x \mapsto \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, en $+\infty$ **f)** $f : x \mapsto x\ln\big(\sin x\big)$, en 0^+.

3 SF 2 Etudier la limite de f au point considéré :

a) $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{\cos x}$ en $+\infty$ **b)** $f : x \mapsto \dfrac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$ en $+\infty$

c) $f : x \mapsto (\ln x + \cos x)^2$ en $+\infty$

d) $f : x \mapsto \dfrac{x + \operatorname{Arctan} x}{x}$ en $+\infty$

e) $f : x \mapsto \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$ en $+\infty$ **f)** $f : x \mapsto \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$ en 0^+

4 SF 2 SF 3 Etudier, en fonction de la valeur de $a \in \mathbb{R}$, la limite de $f : x \mapsto x(a + \sin x)$ en $+\infty$

5 SF 3 Montrer que f n'a pas de limite au point indiqué.

a) $f : x \mapsto \cos x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0 **b)** $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ en $+\infty$

c) $f : x \mapsto \dfrac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}$ en $+\infty$

6 SF 2 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$, croissante, vérifiant : $\dfrac{f(2x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f(2^n x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

2. Montrer : $\forall c \in]1, +\infty[$, $\dfrac{f(cx)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

3. Montrer : $\forall c \in]0, 1[$, $\dfrac{f(cx)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

7 SF 2 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que :

- pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$
- il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $|f(x)| \leq Mx$.

Montrer que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ possède une limite en 0 et en $+\infty$.

Etude de continuité

8 SF 4 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Etudier la continuité au point n des fonctions : **a)** $f : x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)^2$ **b)** $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$

9 SF 6 SF 5 Justifier la continuité de f sur son ensemble de définition puis étudier ses éventuels prolongements par continuité aux bornes :

a) $f : x \mapsto x^x$ **b)** $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{\operatorname{Arcsin}(1-x)}{1-x}}$

c) $f : x \mapsto \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **d)** $f : x \mapsto \exp\left(\dfrac{\ln x}{\ln x - 1}\right)$

10 SF 6 SF 4 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que la fonction $M : x \mapsto \max\big(f(x), g(x)\big)$ est continue sur $\mathbb{R}$. *Indication : On pourra commencer par trouver une expression de* $\max(a,b)$ *en fonction de* $|a-b|$ *pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$.

11 SF 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

- pour tous réels a, b tels que $a < b$, $f([a,b])$ est un segment.
- pour tout $y \in \mathbb{R}$ et toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente d'antécédents de y : $f(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n) = y$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Donner un exemple de fonction non continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant la première propriété.

12 SF 4 On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme suit :

- pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $f(x) = 0$.
- pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \wedge q = 1$: $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{1}{q}$.

Quels sont les points de continuité de f ?

Continuité ponctuelle

13 SF 7 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, continue.
On suppose que pour tout $\alpha > 0$, la suite $\big(f(n\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Montrer que la fonction f est croissante.

14 SF 7

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue périodique et non constante. Montrer que f possède une plus petite période. *On rappelle qu'une période est par définition* ***strictement*** *positive*

2. Trouver un exemple de fonction périodique non constante sur $\mathbb{R}$ et n'ayant pas de plus petite période.

15 SF 7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 1-lipschitzienne. On pose :
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x\}$$

1. Montrer que A est un intervalle.

2. On suppose A borné et non-vide. Montrer que A est un segment.

Equations fonctionnelles - continuité ponctuelle

16 SF 7 **1.** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite u par $u_0 = x_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$. Etudier la convergence de u en fonction de x_0.

2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en 0, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = h(e^x - 1)$. Montrer que h est constante sur $\mathbb{R}_-$.

3. ★★★ Montrer que h est constante sur $\mathbb{R}_+$. *Indication : Considérer la bijection réciproque de* $x \mapsto e^x - 1$ *de* $\mathbb{R}_+$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

17 SF 7 SF 8 Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues en 0, telles que pour tout réel x : $f(2x) = f(x)$.
Indication : Considérer la suite $(\frac{x}{2^n})_{n\geq 0}$ *et utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité.*

18 SF 7 SF 8 Trouver toutes les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues telles que : $f(0) = f(1)$ et $\forall x \in [0,1]$, $f(x^2) \leq f(x)$

19 SF 7 SF 8 **1.** Etablir : $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right) = \dfrac{1}{2^n}\sin x$
pour tout réel x et tout entier naturel n non nul

2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues en 0, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)\cos x$.

Equations fonctionnelles - continuité globale

20 SF 7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

1. Montrer : $f\left(\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x + \frac{k}{2^n}y\right) \leq \left(1-\frac{k}{2^n}\right)f(x) + \frac{k}{2^n}f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, 2^n]\!]$.
2. On pose : $A = \left\{\frac{k}{2^n} ; n \in \mathbb{N}, k \in [\![0, 2^n]\!]\right\}$. Montrer que A est dense dans $[0,1]$
3. En déduire que f est convexe.

21 SF 7 SF 9 On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues et telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

1. On suppose que f est solution du problème. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(0)$ vérifie :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad g(x+y) = g(x) + g(y)$$
2. Déterminer toutes les solutions du problème.

22 SF 7 SF 9

1. Déterminer toutes les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues, telles que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$$
2. Déterminer toutes les $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, continues, telles que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

Problèmes d'existence de solutions

23 SF 10 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue et positive. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, 1[$ tel que : $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$.

24 SF 10 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue, telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$ admet au moins une solution.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que l'équation $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$ d'inconnue x admet au moins une solution.
Indication : Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}) - f(\frac{k}{n})$.

25 SF 10 SF 12 Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $f([0,1]) \subset g([0,1])$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$

26 SF 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

27 SF 10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $n \geq 2$ tel que la fonction $f \circ \cdots \circ f$ (n fois) possède un point fixe. Montrer que f possède un point fixe.

28 SF 10 SF 12 Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède exactement deux solutions ?

Théorème des bornes atteintes

29 Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que pour tout $x \in [a,b]$: $f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$: $f(x) + m \leq g(x)$.

30 SF 12 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f est bornée et g continue. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

31 Soit $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, continue, telle que :

$$\forall x \in [0,3], \quad f\left(\frac{x+1}{3}\right) + 2f\left(\frac{x^2}{9}+1\right) + f(2+\sin x) = 5f(x) + 2$$

Montrer que f est constante.

32 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que f admet un minimum sur $[0, +\infty[$.

33 SF 10 SF 12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, surjective pour laquelle $f^{-1}\left(\{y\}\right)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que :
   - Ou bien : $f < 0$ sur $]-\infty, -M[$ et $f > 0$ sur $]M, +\infty[$
   - Ou bien : $f > 0$ sur $]-\infty, -M[$ et $f < 0$ sur $]M, +\infty[$
2. En déduire que f possède des limites infinies en $+\infty$ et $-\infty$, de signe opposé.

34 SF 12 Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, continues. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $M(x) = \sup_{t \in [0,1]} \left(f(t) + xg(t)\right)$.

1. Montrer que la fonction M est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $t_x \in [0,1]$ tel que $M(x) = f(t_x) + xg(t_x)$.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $M(x) \leq M(y) + g(t_x)(x-y)$
3. En déduire que M est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

35 SF 12 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ positive et continue. Pour tous $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on pose $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x^k)}{3^k}$ et $v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x^k)}{2^k}$.

1. On suppose que $u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que f est nulle.
2. On suppose que $v_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que f est constante.

Suites implicites

36 SF 13 Pour tout $n \geq 2$, on note f_n la fonction $x \mapsto x^n + x^2 - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $x^n + x^2 = 1$ possède exactement une solution dans $[0,1]$, notée x_n.
2. Montrer que (x_n) est croissante. *Indication : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x_n) \leq 0$.*
3. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

37 SF 13 Pour tout $n \geq 3$, on note f_n la fonction $x \mapsto x^n - nx + 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède exactement deux solutions α_n et β_n telles que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.
2. Montrer que (α_n) converge et déterminer sa limite.
3. Avec la formule du binôme montrer que pour tout $n \geq 3$: $f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) > 0$. En déduire que (β_n) converge et trouver sa limite.