1 Raisonner par l'absurde en supposant $\ell > 0$. Ensuite l'idée est de construire des valeurs de f arbitrairement grande en ajoutant des accroissements $f(x+1) - f(x)$.
Pour cela :

- Avec la définition de la limite, montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $f(x+1) - f(x) \geq \frac{\ell}{2}$ pour $x \geq A$.
- En faisant apparaître un télescopage, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(A+n) - f(A) \geq n\frac{\ell}{2}$.
- Aboutir à une contradiction en examinant la limite de $f(A+n)$.

2 **a)** Utiliser la quantité conjugué.
Réponse : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{7}{2}$.

b) Utiliser la quantité conjugué.
Réponse : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Revenir à l'exponentielle et utiliser une limite classique.
Réponse : $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e$.

d) Au dénominateur, factoriser par e^x dans le logarithme puis écrire le dénominateur comme une somme et factoriser le dénominateur par x *Réponse :* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

e) Revenir à l'exponentielle et utiliser les croissances comparées en faisant intervenir $\ln x$ dans le quotient qui apparaît dans l'exponentielle.
Réponse : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

f) Ecrire $f(x) = \dfrac{x}{\sin x} \times \sin x \ln(\sin x)$ puis utiliser les croissances comparées pour le second facteur.
Réponse : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

3 **a)** Produit d'une fonction de limite nulle par une fonction bornée.
Réponse : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Factoriser par les termes prépondérants : x au numérateur et x^2 au dénominateur. On est ramené au produit d'une fonction de limite nulle par une fonction bornée
Réponse : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Procéder par minoration en minorant $\ln x + \cos x$ par $\ln x - 1$.
Réponse : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

d) Procéder (par exemple) par encadrement en encadrant Arctan.
Réponse : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

e) Procéder par encadrement en utilisant $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$.
Réponse : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

f) La fonction f est nulle sur $]0,1[$.
Réponse : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

4
- Pour $a > 1$, procéder par minoration en minorant $a + \sin x$ par $a - 1$ *Réponse :* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Pour $a < -1$, procéder par majoration en majorant $a + \sin x$ par $a + 1$ *Réponse :* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
- Pour $a \in [-1,1]$,Montrer que f n'a pas de limite en construisant deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limites infinies telles que $f(u_n) \to 0$ et $f(v_n) \to +\infty$.

5 On utilise le savoir faire SF 3 en construisant dans chaque cas une suite (u_n) et une suite (v_n) pour lesquelles $\big(f(u_n)\big)$ et $\big(f(v_n)\big)$ ont des limites différentes.

a) On peut prendre $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$

b) On peut prendre $u_n = n$ et $v_n = n + \dfrac{1}{2}$

c) On peut prendre $u_n = n$ et $v_n = n + \dfrac{1}{2}$

6 **1.** Procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour l'hérédité, faire apparaître $f(2^n x)$ en écrivant
$$\frac{f(2^{n+1}x)}{f(x)} = \frac{f(2^{n+1}x)}{f(2^n x)} \times \frac{f(2^{n+1}x)}{f(x)}$$

2. Fixer n tel que $1 \leq c \leq 2^n$ puis procéder par encadrement en utilisant la croissance de f et la question 1.

3. Se ramener à la question 2 en faisant apparaître $1/c \geq 1$:
$$\frac{f(cx)}{f(x)} = \frac{f(cx)}{f(\frac{1}{c} \times cx)} = \frac{1}{\dfrac{f(\frac{1}{c} \times cx)}{f(cx)}}$$

7

8 **a)** Fixer n et étudier la limite à gauche et la limite à droite f. Pour cela, calculer $f(x)$ pour $x \in]n-1, n[$ puis pour $x \in]n, n+1[$.
Réponse : $f(x) \underset{x\to n^-}{\longrightarrow} 1$ *et* $f(x) \underset{x\to n^-}{\longrightarrow} 0$ *donc f n'est pas continue en n.*

b) Fixer n et étudier la limite à gauche et la limite à droite g. Pour cela, calculer $g(x)$ pour $x \in]n-1, n[$ puis pour $x \in]n, n+1[$.
Réponse : $g(n) = n$, $g(x) \underset{x\to n^-}{\longrightarrow} n$ *et* $g(x) \underset{x\to n^-}{\longrightarrow} n$ *et g est continue en n.*

9 **a)** Revenir à l'exponentielle.

- La continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ se justifie par composition (mais attention à la rédaction)
- La limite en 1 s'obtient par croissances comparées.

b)
- La continuité sur $[0,1[\cup]1,2]$ se justifie par composition (mais attention à la rédaction) puis quotient.
- La limite en 1 se calcule en faisant apparaître un taux d'accroissement.

c)
- La continuité sur $\mathbb{R}^*$ se justifie par composition (mais attention à la rédaction) puis produit.
- La limite en 0 se calcule en faisant remarquant le produit d'une fonction de limite nulle par une fonction bornée.

d) Ici la fonction est définie sur $]0, e[\cup]e, +\infty[$ donc il y a deux points à considérer pour le prolongement.

- La continuité sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$ se justifie par composition.
- Les limites en e se calculent en calculant la limite de $\frac{\ln x}{\ln x - 1}$ (qui n'est pas une forme indéterminée).
On obtient des limites infinies : f n'est pas prolongeable par continuité en e.
- La limite en 0 se calcule en factorisant par $\ln x$ le numérateur et le dénominateur dans l'exponentielle.

10 Deux méthodes sont possibles :

- *Première méthode*. En suivant l'indication on peut exprimer M en fonction de f, g et $|f-g|$ et conclure par opération sur les fonctions continues.
- *Deuxième méthode*. Revenir à la définition de la continuité *i.e.* fixer $a \in \mathbb{R}$ et montrer que $M(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} M(a)$. Distinguer trois cas :
  - Si $f(a) > g(a)$. Montrer que M coïncide avec f sur tout un voisinage de a.
  - Si $g(a) > f(a)$. Montrer que M coïncide avec g sur tout un voisinage de a.
  - Si $f(a) = g(a)$. Fixer $\varepsilon > 0$ et montrer que $|M(x) - M(a)| \leq \varepsilon$ au voisinage de a en traduisant la continuité de f et de g *i.e.* le fait que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = M(a)$ et $\lim_{x \to a} g(x) = g(a) = M(a)$

11

12 *Réponse :*

- f n'est continue en aucun point de $\mathbb{Q}$.
- f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

13 Procéder par l'absurde en supposant l'existence de $a < b$ tel que $f(a) > f(b)$. Exploiter la continuité de f pour étendre cette inégalité sur des voisinages de a et b *i.e.* construire un $\alpha > 0$ tel que $f(x) > f(y)$ pour tous $x \in [a-\alpha, a+\alpha]$ et $y \in [b-\alpha, b+\alpha]$. Construire alors n et m tels que $n\alpha \in [a-\alpha, a+\alpha]$ et $m\alpha \in [a-\alpha, a+\alpha]$.

14

1. L'ensemble A des périodes de f est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ donc possède une borne inférieure $T \geq 0$. Il s'agit de montrer que :
   - $T > 0$. On peut par exemple procéder par l'absurde. Fixer $a > 0$ tel que $f(a) > f(0)$ (par exemple) puis exploiter la continuité de f pour étendre cette inégalité sur un voisinage de a *i.e.* construire $\alpha > 0$ tel que $f(x) > f(0)$ pour tout $x \in [a-\alpha, a+\alpha]$. Considérer une période $\beta < \alpha$ de f et construire $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\beta \in [a-\alpha, a]$
   - T est une période de f. Utiliser les suites *i.e.* considérer une suite (T_n) de périodes de f telle que $T_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} T$.
2. La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

15

1. Utiliser la caractérisation des intervalles *i.e.* montrer que si $x, y \in A$ sont tels que $x < y$ et si $t \in [x, y]$ alors $t \in A$.
2. Posant $a = \inf A$ et $b = \sup A$ il s'agit de montrer que $a, b \in A$. Utiliser les suites.

16

1. Il s'agit d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto e^x - 1$ est croissante donc on dispose d'une méthode classique (voir partie I du cours sur l'exercice Ex. 43, banque INP) :
   - Etudier le signe de $g : x \mapsto e^x - 1 - x$
   - Distinguer les cas $x_0 < 0$, $x_0 = 0$, $x_0 > 0$.
   - Dans le cas $x_0 < 0$:
     - Montrer par récurrence que $u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
     - Montrer que u est croissante avec le signe de g.
     - Montrer que $\lim u_n = 0$ grâce au critère $\ell = f(\ell)$.
   - Raisonner de même pour $x_0 > 0$.
2. Etant donné $x_0 \in \mathbb{R}_-$ quelconque montrer que $h(x_0) = h(0)$.
   Pour cela utiliser la question 1.
   L'hypothèse faite sur f permet d'écrire $f(u_{n+1}) = f(u_n)$ et donc $f(x_0) = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   La caractérisation séquentielle de la limite assure par ailleurs que $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. La fonction $x \mapsto e^x - 1$ a pour réciproque $\varphi : y \mapsto \ln(1+y)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
   La fonction h vérifie aussi $h(\ln(1+y)) = h(y)$ pour tout $y \geq 0$.
   Adapter le raisonnement des questions 1 et 2 en fixant $x_0 \geq 0$ puis en considérant la suite v définie par $v_0 = x_0$ et $v_{n+1} = \varphi(v_n)$.
   En adaptant le raisonnement de la question 1, on montre que $v_n \to 0$.
   En copiant le raisonnement de la question 2, on montre que $h(x_0) = h(0)$.

17 Procéder par analyse-synthèse.
Pour l'analyse, en posant $u_n = \frac{x}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- D'une part la suite $\big(f(u_n)\big)$ est constante vu l'hypothèse faite sur f.
- D'autre part $f(u_n) \to f(0)$ (caractérisation séquentielle de la continuité)

La premier terme $f(u_0) = f(x)$ est donc égal à la limite $f(0)$, ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$: f est constante.
Ne pas oublier la synthèse.

18 Procéder par analyse-synthèse.
Pour l'analyse, prendre $x \in]0,1[$.
En posant $u_n = x^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- D'une part la suite $\big(f(u_n)\big)$ est décroissante vu l'hypothèse faite sur f.
- D'autre part $f(u_n) \to f(0)$ (caractérisation séquentielle de la continuité)

Cela donne $f(x) \geq f(0)$.
En posant $v_n = x^{1/2^n}$, on obtient de même $f(x) \leq f(1)$.
L'hypothèse $f(0) = f(1)$ permet de conclure.
Ne pas oublier la synthèse.

19

1. Procéder par récurrence sur n en utilisant $\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pour l'hérédité
2. Procéder par analyse-synthèse.
   Pour l'analyse, en fixant $x \neq 0$ et en réitérant l'hypothèse faite sur f, on obtient :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$
   En utilisant alors le résultat de la question 1 puis en prenant la limite pour $n \to +\infty$ du membre obtenu à droite de l'égalité on trouve :
   $$f(x) = f(0)\frac{\sin x}{x}$$
   Les candidats solutions sont donc les fonction f de la forme
   $$f : x \mapsto \begin{cases} \alpha \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ne pas oublier la synthèse dans laquelle il s'agit de vérifier que les candidats obtenus satisfont la relation $f(2x) = f(x)\cos x$ et sont continues en 0.

20 1. Fixer $x, y \in \mathbb{R}$ et procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour l'hérédité, étant donné $k \in [\![0, 2^n]\!]$, remarquer que si l'on note $x_n = \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)x + \frac{k}{2^n}y$ et $x_{n+1} = \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)x + \frac{k}{2^{n+1}}y$, alors : $x_{n+1} = \frac{x + x_n}{2}$.

2. Il suffit de montrer que tout $t \in [0,1]$ est limite d'une suite d'éléments de A. Considérer la suite $\left(\frac{\lfloor 2^n t \rfloor}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Etant donné $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, il s'agit de montrer :

$$(\star) \quad f\Big((1-t)x + ty\Big) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

Combiner les deux questions précédentes :

- La question 2 assure qu'il existe une suite (t_n) de A telle que $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t$
- La question 1 assure que l'inégalité $(\star)$ est vraie pour tous les t_n :

Il suffit de passer aux limites dans les inégalités (sans oublier de préciser en quoi la continuité de f est essentielle).

21 1.

2. Procéder par analyse-synthèse :

- Dans l'analyse, avec la question 1, la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(0)$ vérifie $g(x+y) = g(x) + g(y)$. On sait alors (exercice vu dans le cours), que g est une fonction linéaire *i.e.* de la forme $x \mapsto ax$.
- Ne pas oublier l'étape de synthèse.

Solutions : il s'agit des fonctions affines $x \mapsto ax + b$.

22 On sait d'après le cours que les fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues, telles que : $(\star)$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sont les fonctions linéaires $x \mapsto ax$. On peut traiter chaque question en se ramenant à l'équation $(\star)$.

1. La fonction nulle est solution. Pour les autres, procéder par analyse-synthèse. Dans l'analyse, commencer par montrer que $f > 0$ et montrer que $g = \ln f$ est solution de l'équation $(\star)$. Ne pas oublier la synthèse.
Solutions : il s'agit des fonctions $x \mapsto e^{ax}$

2. Procéder par analyse-synthèse. Dans l'analyse, montrer que $g = f \circ \exp$ est solution de l'équation $(\star)$. Ne pas oublier la synthèse.
Solutions : il s'agit des fonctions $x \mapsto a \ln x$

23 Appliquer le T.V.I afin de montrer que $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ s'annule. Pour cela remarquer (en factorisant par x) que $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

24 1. Appliquer le T.V.I afin de montrer que $\varphi : x \mapsto f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$ s'annule sur $[0, \frac{1}{2}]$.

2. Appliquer le T.V.I afin de montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ s'annule sur $[0, 1 - \frac{1}{n}]$.

On trouve $\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = 0$. Que peut-on en déduire quant aux signes des $\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$?

25 Appliquer le T.V.I afin de montrer que $\varphi : x \mapsto f(x) - g(x)$ s'annule.
Il s'agit de trouver un a pour lequel $\varphi(a) \geq 0$ et un b pour lequel $\varphi(b) \leq 0$.
Dessiner l'hypothèse $f([0,1]) \subset g([0,1])$: il s'agit de trouver un point a en lequel on est certain que le graphe de g est au-dessus de celui de f est un point b en lequel le graphe de g est en dessous de celui de f. On peut par exemple prendre a tel que : $g(a) = \max_{[0,1]} g$ et b tel que : $g(b) = \min_{[0,1]} g$

26 Appliquer le TVI strictement monotone afin de montrer que $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$.
Examiner les limites de φ en $\pm\infty$.

27 Appliquer le T.V.I afin de montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ s'annule sur $\mathbb{R}$. Considérer un point fixe a de $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et poser $x_k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}(a)$ puis calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x_k)$.

28 Procéder par l'absurde.

29 Appliquer le théorème des bornes atteintes à la fonction $\varphi : x \mapsto g(x) - f(x)$.

30 Formaliser l'hypothèse faite sur f :
il existe M tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-M \leq f(x) \leq M$.

- $f \circ g$ est bornée par M (on peut prendre $g(x)$ au lieu de x dans l'encadrement ci-dessus).
- Pour montrer que $g \circ f$ est bornée, justifier que g est bornée sur $[-M, M]$.

31 La fonction f possède un minimum m et un maximum M sur $[1,3]$.
En évaluant l'égalité de l'énoncé en un point x judicieusement choisi, on montre que $m \geq -2$.
De même on montre à nouveau en évaluant que $M \leq -2$.
Ceci assure que f est constante, de valeur -2.

32 Utiliser la définition de la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ avec l'exigence $A = f(0)$ pour assurer l'existence d'un B tel que pour tout x en dehors du segment $[0, B]$: $f(x) \geq f(0)$.
Il reste ensuite à appliquer un théorème.

33 1. Avec $y = 0$, l'hypothèse sur f assure qu'il existe $M > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus [-M, M]$.
Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors que f est de signe constant sur chaque intervalle $]-\infty, -M[$ et $]M, +\infty[$. Montrer que ces deux signes ne peuvent être identiques en procédant par l'absurde et en montrant qu'alors f serait minorée sur $\mathbb{R}$, notamment à l'aide du théorème des bornes atteintes sur $[-M, M]$, contredisant ainsi la surjectivité de f.

2. En supposant par exemple que

$$f < 0 \text{ sur }]-\infty, -M[\quad \text{et} \quad f > 0 \text{ sur }]M, +\infty[$$

on montre que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Revenir pour cela à la définition de la limite. Fixer $A > 0$ et adapter le raisonnement précédent avec $y = A$ pour montrer qu'il existe $M' > 0$ tel que :

- Ou bien $f > A$ sur $]M', +\infty[$ et $f < A$ sur $]-\infty, -M'[$
- Ou bien $f < A$ sur $]M', +\infty[$ et $f > A$ sur $]-\infty, -M'[$

montrer que la seconde alternative est impossible en procédant de même par l'absurde et en montrant que f serait majorée sur $\mathbb{R}$.

34 **1.** Le réel x étant fixé, appliquer le théorème des bornes atteintes à la fonction $\varphi_x : t \mapsto f(t) + xg(t)$.

2. Faire apparaître astucieusement $yg(t_x)$:

$$M(x) = \underbrace{f(t_x) + yg(t_y)}_{\text{majoré par } M(y)} + g(t_x)(x-y)$$

3. Majorer $|g(t_x)|$ à l'aide du théorème des bornes atteintes.

35 **1.** Considérer $x \in [0,1]$ en lequel f atteint son maximum.

2.

36 **1.** Pour $n \geq 2$ fixé, appliquer le TVI strictement monotone à $f : x \mapsto x^n + x^2 - 1$ sur $[0,1]$.

2. Fixer $n \in \mathbb{N}$. Afin de montrer que $x_{n+1} \geq x_n$, il suffit de montrer que $f_{n+1}(x_{n+1}) \geq f_{n+1}(x_n)$.
Puisque $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$, il suffit donc de montrer que $0 \geq f_{n+1}(x_n)$.
Pour cela, calculer $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n^2 - 1$ en utilisant le fait que $0 = x_n^n + x_n^2 - 1$.

3. Le th. de la limite monotone assure que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \leq 1$.
Montrer alors par l'absurde que $\ell = 1$.
Pour obtenir une contradiction, faire tendre n vers l'infini dans la relation $x_n^n = x_n^2 - 1$.

37 **1.** Pour $n \geq 3$ fixé, appliquer le TVI strictement monotone à $f : x \mapsto x^n - nx + 1$ sur chaque intervalle $[0,1[$ et $]1,+\infty[$.

2. Montrer d'abord que (α_n) est décroissante.
Fixer $n \in \mathbb{N}$. Afin de montrer que $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$, il suffit de montrer que $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \geq f_{n+1}(\alpha_n)$.
Puisque $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$, il suffit donc de montrer que $0 \geq f_{n+1}(\alpha_n)$.
Pour cela, calculer $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} - (n+1)\alpha_n + 1$ en utilisant le fait que $0 = \alpha_n^n - n\alpha_n + 1$.
Le th. de la limite monotone assure ensuite que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \geq 0$.
Montrer alors par l'absurde que $\ell = 0$.
Pour obtenir une contradiction, faire tendre n vers l'infini dans la relation $\alpha_n^n = n\alpha_n - 1$.

3. Pour montrer que $f\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) \geq 0$, minorer $\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)^n$ en ne gardant que les trois premiers termes dans la formule du binôme.
Comparer ensuite $1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ et β_n (f_n est croissante sur $[1,+\infty[$).