Divisibilité, division euclidienne, congruences

1 SF 1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $7^{8n+1} + 10(-1)^n$ est divisible par 17. *Indication : Calculer 7^8 modulo 17*

2 SF 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
a) 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$. **b)** 17 divise $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$.

3 SF 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: 16 divise $5^n - 1 - 4n$.

4 SF 1 Montrer que 6 divise $n(n+2)(7n-5)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5 SF 1 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \equiv b\ [n]$.
Montrer que : $a^n \equiv b^n\ [n^2]$.

6 SF 2 SF 3 Calculer le reste de la division euclidienne :
a) de 3^{2189} par 25 **b)** de 3872^{597} par 5

7 SF 1 SF 2 SF 3 Montrer que :
a) 11 divise $2^{123} + 3^{121}$ **b)** 11 divise $2^{605} + 5^{605}$
c) 7 divise $9^{346} - 4^{434}$

8 SF 1 SF 2 SF 3 Montrer que 7 divise $2^{4^n} - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

9 SF 2 SF 3 Déterminer le reste de la division euclidienne de $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k}$ par 7.

PGCD, algorithme d'euclide

10 SF 5 Calculer le pgcd et une égalité de Bézout pour
a) $a = 62$ et $b = 43$ **b)** $a = 744$ et $b = 516$
c) $a = 270$ et $b = 105$

11 SF 6 Soit (F_n) une suite d'entiers vérifiant $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\quad F_{n+1} \wedge F_n = F_1 \wedge F_0$

12 Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $\mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b = \mathbb{U}_{a \wedge b}$.

Equations diophantiennes

13 SF 5 SF 7 Résoudre les équations d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$:
a) $42x - 25y = 4$ **b)** $9x + 15y = 18$
c) $221x + 247y = 15$ **d)** $62x + 43y = 1$

14 SF 4 Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:
a) $5x \equiv 3\ [28]$ **b)** $102x \equiv 153\ [357]$ **c)** $10x \equiv 12\ [15]$

15 SF 8 Résoudre les systèmes d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$:
a) $\begin{cases} x + y = 100 \\ x \wedge y = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 40 \\ x \vee y = 75 \end{cases}$

16 SF 8 Résoudre les équations d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$:
a) $x \wedge y = x + y - 1$ **b)** $x \vee y = x + y - 1$
c) $x \wedge y + x \vee y = 2x + 3y$

17 *Ex. 94, banque INP*
On considère le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.
1. Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
2. En déduire toutes les solutions de (S).

Entiers premiers entre eux

18 SF 9 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
a) $(n^2 + n) \wedge (2n + 1) = 1$. **b)** $(3n^2 + 2n) \wedge (n + 1) = 1$.

19 SF 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n + 1$ et $n + 1$ sont premiers entre eux. En déduire que $n + 1$ divise $\binom{2n}{n}$.

20 SF 6 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que a et b sont premiers entre eux.
Montrer que : $a \wedge (bc) = a \wedge c$.

21 SF 9 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $a + b$ est premier avec ab.

22 Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}$, premiers entre eux tels que x^m et x^n soient entiers
a) Montrer que $x \in \mathbb{Q}$. **b)** En déduire que $x \in \mathbb{Z}$.

23 SF 9 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + \sqrt{2})^n$ peut s'écrire $a_n + b_n\sqrt{2}$ pour certains $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ tels que $a_n \wedge b_n = 1$.

24 SF 1 SF 2 Soit $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{Z}$ tel que : $a \wedge n = 1$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note r_k le reste de la division euclidienne de a^k par n.
1. Pourquoi l'application $k \mapsto r_k$ n'est pas injective ?
2. En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^N \equiv 1\ [n]$.
3. Montrer que la suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est périodique.

Nombres premiers

25 SF 1 Montrer qu'il n'existe aucun nombre premier entre $n! + 2$ et $n! + n$.

26 SF 1 Soient a et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
On suppose $a^p - 1$ premier.
a) A l'aide d'une factorisation de $a^p - 1$ montrer que $a = 2$.
b) En déduire que p est premier.

27 SF 1 Soient $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ et $n \in \mathbb{N}$
a) Montrer que : $(n+1)^p - (n^p + 1) \equiv 0\ [p]$
b) Montrer que : $(n+1)^p - (n^p + 1) \equiv 0\ [2p]$

28 SF 1 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n^7 - n$ est divisible par 42.

29 **1.** Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \equiv 3\ [4]$. Montrer que N possède un diviseur premier congru à 3 modulo 4.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
Indication : Adapter la preuve de finitude de l'ensemble $\mathbb{P}$ en posant $N = \alpha p_1 \cdots p_n - 1$ où α est à choisir judicieusement.

30 SF 1 ★★★★ Soit $p \in \mathbb{P}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel : $\quad q^k \equiv 1 \ [p^n]$. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut donc noter t_n le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $q^k \equiv 1 \ [p^n]$.*
2. Montrer que la suite $\left(\dfrac{t_{n+1}}{t_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est stationnaire.

Décomposition en facteurs premiers valuation p-adique

31 SF 11 ★★★★ Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$

1. Montrer que : $\quad v_p(a+b) \geq \min\big(v_p(a), v_p(b)\big)$.
2. Trouver des valeurs de a, b et p pour lesquelles :
$$v_p(a+b) > \min\big(v_p(a), v_p(b)\big)$$
3. Montrer que si $v_p(a) \neq v_p(b)$ alors
$$v_p(a+b) = \min\big(v_p(a), v_p(b)\big)$$

32 SF 1 SF 10 ★★★★ Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que a divise b si et seulement si a^2 divise b^2.

33 SF 10 ★★★★ Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$. On suppose que ab est le carré d'un entier. Montrer que a et b sont tous deux des carrés d'entiers.

34 SF 10 ★★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $n = x^2$ et $n = y^3$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{N}$ tel que $n = z^6$.

35 SF 11 ★★★★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} k$.
Calculer $v_2(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

36 SF 11

1. ★★ Montrer que : $\quad v_2(100!) = 97$
2. ★★★★ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{P}$. Etablir : $\quad v_p(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

   Indication : On pourra librement utiliser l'égalité $\left\lfloor \dfrac{\lfloor px \rfloor}{p} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ *pour tout $x \in \mathbb{R}$*

37 SF 11 ★★★★ Soient m, n deux entiers tels que $n \geq 2$ et $m \in [\![1, n-1]\!]$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas un entier.