Calcul de dérivées (corrections sur le site)

0 SF 6 *Cet exercice est destiné à ceux qui souhaitent s'entraîner en autonomie au calcul de dérivées. Les corrections sont sur le site.*

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f *sans se soucier des ensembles de dérivabilité* :

a) $f : x \mapsto (x^3 + x - 2)^4$.
b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{(e^x + e^{-x})^2}$.
c) $f : x \mapsto \ln(\ln x)$.
d) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
e) $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 2}}$.
f) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x^4)}{x}$.
g) $f : x \mapsto \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2 - 1}$.
h) $f : x \mapsto \dfrac{\ln\sqrt{3x+7}}{4 - x^2}$.
i) $f : x \mapsto \left(\cos^2 x + \dfrac{3}{2}\right)\sin 2x$.
j) $f : x \mapsto \ln(\ln(\ln x))$.
k) $f : x \mapsto \sin\left(\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\right)$.
l) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 6x - 1}$.

Généralités sur les fonctions

1 SF 3 SF 5 **1.** Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

a) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
b) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1 - \ln x)}{\sqrt{4 - (x-3)^2}}$
c) $f : x \mapsto \sqrt{e^x + 2e^{-x} - 3}$
d) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln x}}{\ln(4x - x^2)}$

2. Dans chacun des cas précédent, déterminer un ensemble sur lequel f est dérivable

2 SF 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos x + \cos(\alpha x)$ est périodique si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.
2. Même question avec $x \mapsto \sin x + \sin(\alpha x)$.

3 SF 3 On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est impaire.

Plus abstraits

4 Pour chacune des affirmations suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse :
1. La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
2. Le produit de deux fonctions croissantes positives est une fonction croissante.
3. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.

5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

6 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x)e^{f(x)} = x$. Montrer que f est strictement croissante.

7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique et croissante. Montrer que f est constante.

Raisonnements par analyse-synthèse

8 SF 12 On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.
1. *Analyse*. Soit f une solution du problème.
  a) Montrer que $f(0) = 1$
  b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1$
2. *Synthèse*. Conclure.

9 SF 12 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à la fois convexes et impaires.

10 SF 12 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y$

11 SF 12
1. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(0) = 0$ et $f(x+y) \leq xy + f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$
2. Existe-t-il des fonctions continues mais non dérivables qui satisfont les conditions précédentes ?

Etude de fonctions

12 SF 3 SF 4 SF 5 SF 6 Dans chacun des cas suivants, étudier la fonction f (commencer par réduire le domaine d'étude dans le cas où f est paire ou impaire) :
a) $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ **b)** $f : x \mapsto x\sqrt{1 - x^2}$ **c)** $f : x \mapsto x(1 - e^x)$

13 SF 7 Déterminer le nombre de solutions de l'équation $(x-1)e^x - ex + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

14 SF 7 **1.** Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x : $\ln x - kx = 0$.
3. Résoudre cette équation pour $k = \ln\sqrt{2}$.

15 SF 7 On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x$.
1. Pour tout $a > 0$, déterminer l'abscisse, notée $g(a)$, du point d'intersection de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a avec l'axe Ox.
2. Dans quel ensemble doit-on choisir α pour qu'il passe par le point $M(\alpha, 0)$ deux tangentes à $\mathscr{C}_f$.

16 SF 7 On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que le point d'abscisse 1 est le seul point en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

17 SF 6 On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \; f''(x) + f(x) \geq 0$.
Etant donné un réel x fixé, montrer que : $f(x+\pi) + f(x) \geq 0$.
Indication : Etudier la fonction $\varphi : t \mapsto f'(t)\sin(t-x) - f(t)\cos(t-x)$.

Fonctions convexes

Inégalités de convexité

18 SF 8 SF 2

1. Montrer que $f : x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave sur $]1,+\infty[$.
2. En déduire : $\forall x,y \in]1,+\infty[, \quad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.

19 SF 2 Etablir : $\forall a,b,x,y \in \mathbb{R}_+^*,\ (x+y)\ln\frac{x+y}{a+b} \leq x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b}$

20 SF 2 Soient $n \geq 1$ et $t_1,\dots,t_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

Etablir : $\quad 0 \leq -\sum_{i=1}^{n} t_i \ln t_i \leq \ln n$

21 SF 8 SF 2

1. Vérifier que $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $n \geq 1$ et $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_+^*$.
   Montrer : $\quad 1+(x_1\dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq (1+x_1)^{\frac{1}{n}}\dots(1+x_n)^{\frac{1}{n}}$
3. Soient $n \geq 1$ et $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}_+^*$.
   Etablir : $(a_1\dots a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1\dots b_n)^{\frac{1}{n}} \leq (a_1+b_1)^{\frac{1}{n}}\dots(a_n+b_n)^{\frac{1}{n}}$

22 SF 2 Soient α,β,γ les angles (non orientés) d'un triangle. Montrer que :

$$\frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1+\sin\beta} + \frac{1}{1+\sin\gamma} \geq \frac{6}{2+\sqrt{3}}$$

Etude de convexité

23 SF 8 SF 9 Soit I un intervalle. Montrer que les fonctions à la fois convexes et concaves sur I sont les fonctions affines.

24 SF 8 Soit f une fonction concave et strictement positive sur un intervalle I. Montrer que $\frac{1}{f}$ est convexe.

25 SF 8 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $g : x \mapsto xf(x)$ est convexe.
Montrer que $h : x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe.

Propriétés des fonctions convexes

26 SF 9 Soit f une fonction concave et positive sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer : $\quad \forall x,y \in \mathbb{R}_+,\quad f(x+y) \leq f(x)+f(y)$.

27 SF 9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. On suppose f convexe sur $\mathbb{R}$.
   Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - \mu x$, définie sur $[a,b]$, possède un maximum en a ou en b.
2. On suppose que f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer un réel μ pour lequel le maximum sur $[a,b]$ de $\varphi : x \mapsto f(x) - \mu x$ n'est atteint ni en a ni en b.

28 SF 9 Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. On suppose que f n'est pas affine. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$f(a-x)+f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Fonctions trigonométriques

29 Soit $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$ vérifiant $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

a) Calculer $\cos 2x$. **b)** En déduire la valeur de x.

30 Que vaut $\tan\frac{\pi}{4}$? Calculer la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{8}$.

31 Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}} \qquad (n-1 \text{ symboles } \sqrt{\cdot})$$

32 SF 10 Montrer que pour tout $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$: $\qquad x \leq \tan x \leq \frac{4x}{\pi}$.

33 SF 11 Résoudre les équations d'inconnue $x \in]-\pi,\pi]$:
a) $\sin x + \sin 2x = 0$. **b)** $\cos 3x - \cos 2x = 0$.

34 SF 10 SF 11 Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
a) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$ **b)** $\sqrt{6}\cos 2x + \sqrt{2}\sin 2x = -2$.

35 SF 11 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
a) $\sin x + \sin 5x = \sqrt{3}\cos 2x$ **b)** $\cos x - \cos 3x + \cos 5x = 0$.

36 SF 11 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
a) $\tan 2x = 3\tan x$ **b)** $2\sin^2 x + \sin^2(2x) = 2$.

37 SF 10 Montrer que pour tout $t \in [0,\pi]$: $\qquad e^t \sin t \leq \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$.

38 Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad |\cos\theta| + |\sin\theta| \geq 1$.

39 SF 10 SF 11 Résoudre : $\quad \cos^3 x + \sin^3 x = 1$ d'inconnue x.

40 SF 3 SF 12 Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que f' soit continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x)| \leq 2 \qquad \text{et} \qquad f(x)f'(x) \geq \sin x$$

41

1. Calculer $\tan\frac{\pi}{12}$.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 13. On considère n réels distincts $x_1 < \dots < x_n$. Montrer qu'il existe $i \in \{1,\dots,n-1\}$ tel que : $\quad \frac{x_{i+1}-x_i}{1+x_i x_{i+1}} < 2-\sqrt{3}$.